

SOLUZIONE DI ODE

- Siano: x variabile indipendente
 y variabile dipendente

La forma generale di equazione differenziale ordinaria del primo ordine è:

$$g(x, y, y') = 0 \quad (*)$$

La funzione $y = \Phi(x)$ è chiamata *soluzione* od *integrale* di (*) se vale:

$$g(x, \Phi(x), \Phi'(x)) = 0 \quad \forall x \in I_x$$

- Se (*) può essere risolta per y' , considereremo allora l'equazione:

$$y' = f(x, y)$$

• Metodi qualitativi

Consideriamo l'oscillatore armonico lineare 1-D:

$$m \ddot{x} + kx = 0 \quad (*)$$

Esso può essere rappresentato analogamente nella forma:

$$\begin{cases} \dot{y} \equiv \frac{dx}{dt} = \dot{x} \\ \dot{y} = \frac{dy}{dt} = -\frac{k}{m} x \end{cases}$$

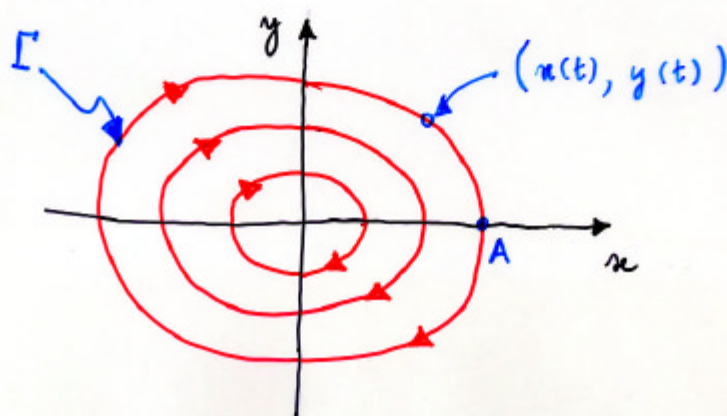
che, dividendo la 2a equazione per la 1a, fornisce:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{k}{m} \frac{x}{y}$$

da cui si ottiene il primo integral di (*):

$$m y^2 + k x^2 = K$$

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$$



Il piano xy è il piano di fase; ogni ellisse appartenente alla famiglia mono-parametrica di ellissi è definita traiettoria (o diagramma o ritratto di fase).

Ogni traiettoria rappresenta un possibile moto del sistema ed ogni punto su di una traiettoria definisce, in maniera univoca, uno stato del sistema, nell'istante assegnato.

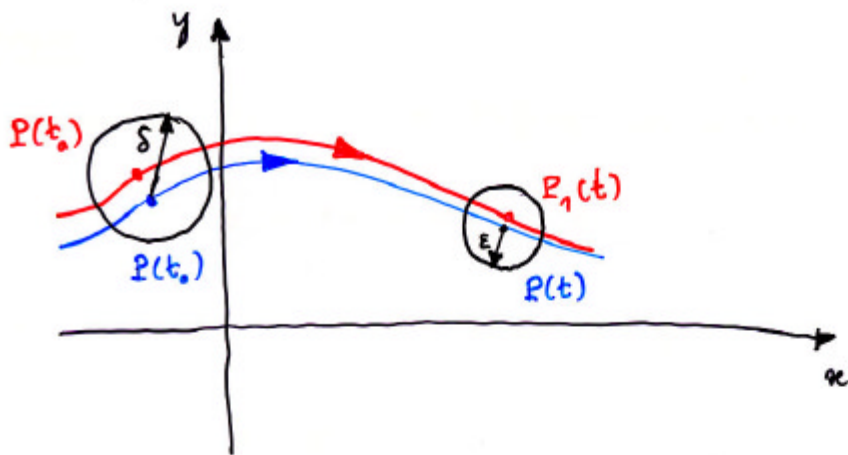
• Stabilità secondo Liapunov

Sia $P(t)$ un punto $(x(t), y(t))$ di una qualsivoglia traiettoria Γ in un ritratto di fase. La soluzione $x = x(t)$, $y = y(t)$ si definisce:

i) stabile nel senso di Liapunov se $\forall \varepsilon > 0, \forall t_0,$
 $\exists \delta_{\varepsilon, t_0}$ t.c. $\forall x_1(t), y_1(t)$ t.c. $d\{P_1(t_0), P(t_0)\} < \delta_{\varepsilon, t_0}$
 $\Rightarrow d\{P_1(t), P(t)\} < \varepsilon, \forall t \geq t_0;$

ii) instabile, altrimenti;

iii) asintoticamente stabile nel senso di Liapunov se $\forall \varepsilon > 0,$
 $\forall t_0, \exists \delta_{\varepsilon, t_0}$ t.c. $\forall x_1(t), y_1(t)$ t.c. $d\{P_1(t_0), P(t_0)\} < \delta_{\varepsilon, t_0}$
 $\Rightarrow d\{P_1(t), P(t)\} \rightarrow 0, t \rightarrow +\infty.$



Esempio

Consideriamo l'equazione di Duffing non forzata ed undamped:

$$\ddot{x} + \alpha x + \beta x^3 = 0$$

con $\alpha > 0$ e $\beta > 0 < 0$. Posto $\dot{x} \equiv y$:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\alpha x - \beta x^3 \end{cases}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\alpha x + \beta x^3}{y}$$

ed integrando:

$$y^2 + \alpha x^2 + \frac{\beta}{2} x^4 = 2E \quad (*)$$

• $\beta > 0$ (hard spring)

∃! punto singolare* : $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$. Il sistema linearizzato è:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\alpha x \end{cases}$$

* quando $E=0$ quali sono gli zeri di (*)?



DIMOSTRAZIONE DI (*)

$$\ddot{x} = \frac{d}{dt} \dot{x}(t) = \frac{d}{dt} y(x(t)) \stackrel{(*)}{=} \dot{y}$$

$$\dot{y} = -\alpha x - \beta x^3$$

$$\frac{d}{dt} y(x(t)) = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt} =$$

$$= \frac{dy}{dx} \dot{x} \equiv$$

$$\equiv \frac{dy}{dx} y$$

$$\frac{d}{dt} y = -\alpha x - \beta x^3 \quad \Leftrightarrow \quad y \frac{dy}{dx} = -\alpha x - \beta x^3$$

$$y dy = -(\alpha x + \beta x^3) dx$$

Integrando ambo i membri:

$$\frac{1}{2} y^2 + c_1 = -\frac{1}{2} \alpha x^2 - \frac{1}{4} \beta x^4 + c_2$$

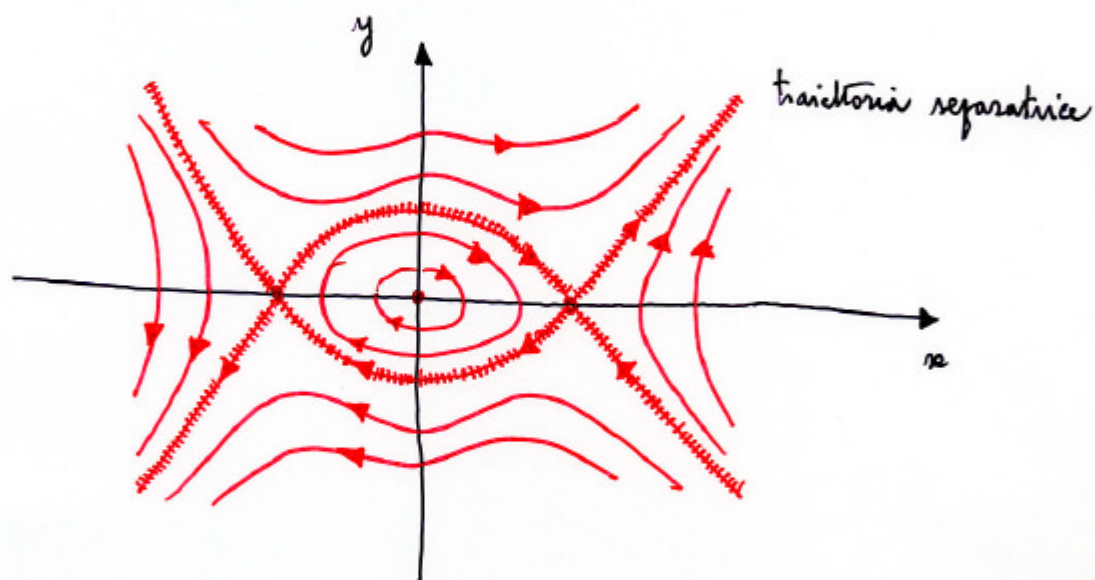
$$E \equiv c_2 - c_1$$

- $\beta < 0$ (soft spring)

\exists 2 punti singolari: $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ e $\begin{cases} x = \pm \sqrt{\frac{\alpha}{|\beta|}} \\ y=0 \end{cases}$.

Rispetto a questi ultimi, il sistema linearizzato è:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = 2\alpha \left(x - \sqrt{\frac{\alpha}{|\beta|}} \right) \end{cases}$$



\exists punti $\begin{cases} x = \pm \sqrt{\frac{\alpha}{|\beta|}} \\ y = 0 \end{cases}$ sono punti a sella (tutte le

traiettorie attorno al punto a sella sono instabili).

• Metodi quantitativi

Consideriamo il problema ai valori iniziali :

$$\begin{cases} y' = f(x, y) & \text{ODE} \\ y(a) = y_0 & \text{i.c.} \end{cases}$$

con f adeguatamente regolare, per esempio con derivate continue ad ogni ordine. Nel **metodo di Taylor** si ricerca la soluzione $y(x)$ nell'intervallo $I_x = [a, b]$ nella forma:

$$y(x) = y(a) + y'(a)(x-a) + \frac{y''(a)}{2}(x-a)^2 + \dots$$

ove i coefficienti sono determinati iterativamente:

$$y(a) = y_0$$

$$y'(a) = f(a, y(a)) = f(a, y_0)$$

$$y''(a) = \frac{d}{dx} y' \Big|_a = \frac{d}{dx} f \Big|_a = \frac{\partial}{\partial x} f \Big|_a + \frac{\partial}{\partial y} f \Big|_a \frac{\partial}{\partial x} y \Big|_a =$$

$$= f_x \Big|_a + f_y y' \Big|_a = f_x \Big|_a + f_y f \Big|_a$$

...

Esempio

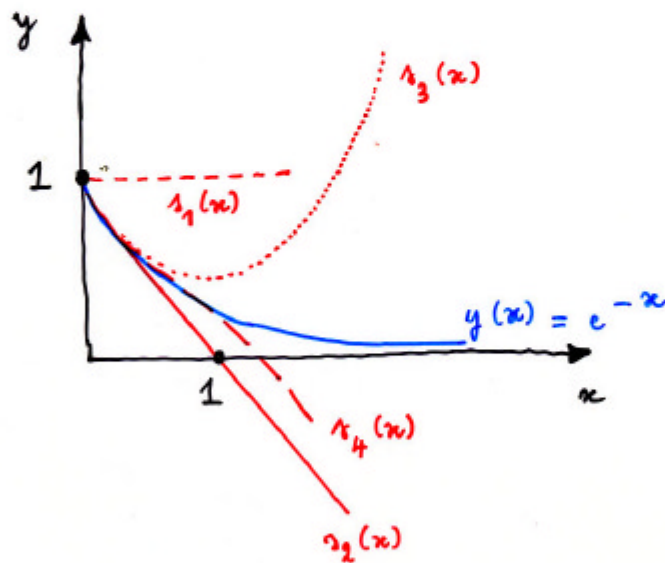
Consideriamo il problema ai valori iniziali:

$$\begin{cases} y'(x) = -y(x) \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad [f(x,y) = -y]$$

che ammette la soluzione analitica $y(x) = e^{-x}$.

In virtù del metodo di Taylor avremo:

$$y(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots$$



Per ottenere un'accuratezza di $\pm 1 \cdot 10^{-3}$ in $x=10$, sono necessari circa 30 termini nella somma.

La determinazione dei coefficienti $y^{(n)}(a)$ deve essere fatta analiticamente!

Una valida alternativa è il **metodo di Eulero**. L'intervallo $I_x = [a, b]$ viene discretizzato in punti $x_n = a + nh$, con h step size. Vale:

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + y'(x_n)h + \frac{y''(x_n)}{2!}h^2 + \dots$$

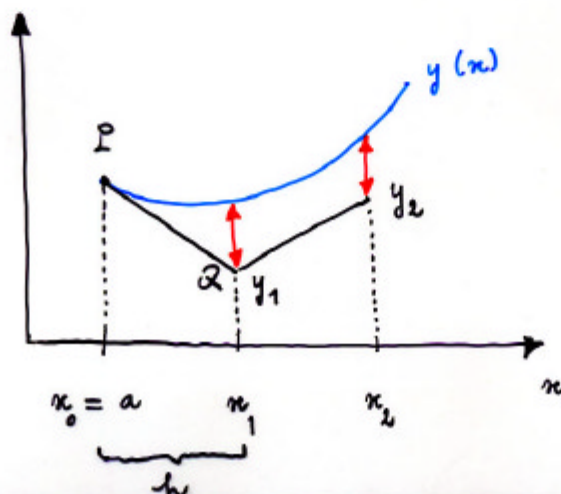
Troncando la somma dopo il 2° termine, avremo:

$$\begin{aligned} y(x_{n+1}) &\approx y(x_n) + y'(x_n)h = \\ &= y(x_n) + f(x_n, y(x_n))h \end{aligned}$$

Definiamo: $y(x_n)$ soluzione esatta di (*) in x_n ;
 y_n soluzione approssimata

L'algoritmo di ricerca di soluzioni secondo il metodo di Eulero è quindi:

$$y_{n+1} = y_n + f(x_n, y_n)h, \quad n = 0, \dots, N$$



i) Partiamo dal punto $P = (x_0, y_0)$. La quantità y' definisce la tangente alla curva y nel piano xy . In particolare:

$$y'_P \equiv f(x_0, y_0)$$

ii) Lungo la linea retta passante per P ed avente tale pendenza estrapoliamo il valore y_1 nell'ascissa $x_1 = x_0 + h$. Siamo così nel punto $Q = (x_1, y_1)$.

iii) Calcoliamo ora la tangente in Q e procediamo in maniera iterativa.

L'errore di troncamento del metodo di Eulero è dato dalla relazione:

$$\tau = \frac{y''(\xi)}{2} h^2$$

ove $\xi \in [x_n, x_{n+1}]$. Questo è l'errore locale, compiuto nel troncamento della somma. L'errore di discretizzazione è:

$$D = y(x_n) - y_n^*$$

e tiene conto dell'errore totale compiuto fino al punto x_n^* .

Sfortunatamente, in numerose applicazioni pratiche del metodo di Eulero si necessita di uno step troppo piccolo, per ottenere la richiesta accuratezza ed il metodo stesso diventa computazionalmente inapplicabile.

E' necessario formulare metodi numerici di soluzione (di ODEs) di ordine maggiore, in modo tale da utilizzare step adeguatamente grandi, ma con il livello di accuratezza desiderato.

Tra questi è il **metodo del punto mediano** o **Runge-Kutta**.

Sviluppiamo in serie di Taylor la funzione $y(x)$ in x_n con uno step positivo $+h$ ed uno negativo $-h$:

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + y'(x_n)h + \frac{y''(x_n)}{2!} h^2 + \frac{y'''(\xi)}{3!} h^3$$

$$y(x_{n-1}) = y(x_n) - y'(x_n)h + \frac{y''(x_n)}{2!} h^2 - \frac{y'''(\eta)}{3!} h^3$$

ove: $\xi \in [x_n, x_{n+1}]$, $\eta \in [x_{n-1}, x_n]$. Sottraendo:

$$y(x_{n+1}) - y(x_{n-1}) = \underbrace{2y'(x_n)h}_{f(x_n, y(x_n))} + O(h^3)$$

E da qui l'algoritmo :

$$y_{n+1} = y_{n-1} + 2f(x_n, y_n)h \quad , n = 0, \dots, N$$

con un errore di troncamento $T \sim O(h^3)$ e che costituisce pertanto un metodo al secondo ordine (laddove il metodo di Eulero è del primo ordine).

Esso è non self-starting : al 10 step fornisce y_1 in termini di x_0, y_0, y_{-1} , con y_{-1} non definito. Allora, per aggirare il problema di indeterminazione, si calcola y_1 utilizzando il metodo di Eulero, ma per mantenere lo stesso grado di accuratezza è necessario suddividere il 10 intervallo $[x_0, x_1]$ in cioè $\frac{1}{h}$ subintervalli.

Consideriamo infine un algoritmo nella forma:

$$y_{n+1} = y_n + \left\{ a f(x_n, y_n) + b f(x_n + \alpha h, y_n + \beta f(x_n, y_n) h) \right\} h, \quad n = 0, \dots, N$$

ove i coefficienti a, b, α, β sono t.c. il metodo abbia un errore di troncamento $T \sim O(h^3)$, ovvero siano t.c.

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ \alpha b = \beta b = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Algoritmi rifatti costituiscono la classe dei metodi **Runge-Kutta del secondo ordine**.

• $a = b = \frac{1}{2}$

$$\alpha = \beta = 1$$

$$y_{n+1} = y_n + \left\{ f(x_n, y_n) + f\left(x_{n+1}, y_n + f(x_n, y_n) h\right) \cdot \frac{h}{2} \right\}, \quad n = 0, \dots, N$$

metodo di Eulero migliorato.

$$\alpha = 0$$

$$\beta = 1$$

$$\alpha = \beta = \frac{1}{2}$$

metodo di Eulero modificato.

Il metodo Runge-Kutta può essere esteso fino all'ordine di accuratezza desiderato. Il più comunemente utilizzato nella pratica computazionale è il metodo Runge-Kutta al quarto ordine:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad , n=0, \dots, N$$

$$k_1 \equiv h f(x_n, y_n)$$

$$k_2 \equiv h f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{1}{2}k_1\right)$$

$$k_3 \equiv h f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{1}{2}k_2\right)$$

$$k_4 \equiv h f(x_{n+1}, y_n + k_3)$$

METODO DELLE FUNZIONI DI GREEN

Consideriamo il seguente problema ai valori al contorno (ODE del 2° ordine):

$$\begin{cases} u'' + k^2 u = f(x) \\ u(0) = a \\ u(\pi) = b \end{cases}$$

Integriamo per parti il prodotto interno:

$$(Lu, G) = \text{termini al contorno} + (u, L^*G)$$

ove: L^* è l'operatore aggiunto di L

G è una funzione arbitraria, che definiremo *funzione di Green*.

Richiediamo:

$$L^*G = \delta(\xi - x)$$

$$\int_0^\pi (u'' + k^2 u) G d\xi = \left[Gu' - uG' \right]_0^\pi + \int_0^\pi (G'' + k^2 G) u d\xi$$

$$\int_0^\pi G f d\xi = \left[Gu' - uG' \right]_0^\pi + \int_0^\pi u L^*G d\xi$$

Per l'assunzione fatta su $G = G(\xi, x)$ si ha:

$$\int_0^{\pi} G(\xi, x) f(\xi) d\xi = G(\pi, x) u'(\pi) - b G_{\xi}(\pi, x) + \\ - G(0, x) u'(0) + a G_{\xi}(0, x) + u(x)$$

Richiediamo inoltre:

$$G(\pi, x) = G(0, x) = 0$$

In questo modo scompaiono dall'equazione precedenti i due termini non assegnati $u'(0)$ ed $u'(\pi)$; è pertanto ricavabile $u(x)$:

$$u(x) = b G_{\xi}(\pi, x) - a G_{\xi}(0, x) + \int_0^{\pi} G(\xi, x) f(\xi) d\xi$$

In conclusione:

La funzione di Green G è soluzione del problema ai valori al contorno:

$$\begin{cases} G_{\xi\xi} + k^2 G = \delta(\xi - x) \\ G(0, x) = 0 \\ G(\pi, x) = 0 \end{cases}$$

Determiniamo G

Dividiamo dapprima l'intervallo di interesse $[0, \pi]$ in 2
sottointervalli: $0 \leq \xi < \alpha$, $\alpha < \xi \leq \pi$. In ciascuno di
essi vale:

$$G_{\xi\xi} + k^2 G = 0$$

agendo infatti $\delta(\xi - \alpha)$ solo nel punto $\xi = \alpha$. Integrando:

$$G(\xi, \alpha) = \begin{cases} A \sin k\xi + B \cos k\xi & , 0 \leq \xi < \alpha \\ C \sin k\xi + D \cos k\xi & , \alpha < \xi \leq \pi \end{cases}$$

In virtù delle condizioni al contorno:

$$G(\xi, \alpha) = \begin{cases} A \sin k\xi & , 0 \leq \xi < \alpha \\ E \sin k(\xi - \pi) & , \alpha < \xi \leq \pi \end{cases}$$

$$E \equiv \frac{C}{\cos k\pi}$$

Integrando tra 0^- e 0^+ l'equazione differenziale originale
 $G_{\xi\xi} + k^2 G = \delta(\xi - \alpha)$ otteniamo:

$$G_{\xi} \Big|_{0^-}^{0^+} + k^2 \int_{0^-}^{0^+} G d\xi = 1$$

che fornisce le due ulteriori condizioni:

$$G \Big|_{0^-}^{0^+} = 0$$

$$G \Big|_{0^-}^{0^+} = 1$$

dalle quali si determinano i coefficienti A ed E . La soluzione al problema dato risulta, in definitiva:

$$u(x) = -a \frac{\sin k(x-\pi)}{\sin k\pi} + b \frac{\sin kx}{\sin k\pi} + \int_0^{\pi} G(\xi, x) f(\xi) d\xi$$

$$G(\xi, x) = \begin{cases} \frac{\sin k(x-\pi) \sin k\xi}{k \sin k\pi} & , \xi \leq x \\ \frac{\sin kx \sin k(\xi-\pi)}{k \sin k\pi} & , \xi > x \end{cases}$$