

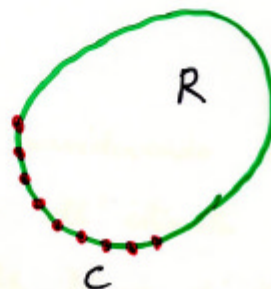
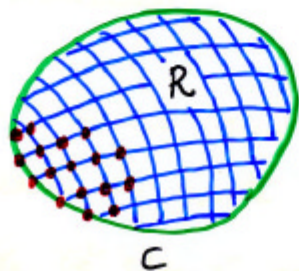
# CLASSIFICAZIONE DEI METODI NUMERICI

## • Domain Type Methods

- Richiedono che l'approssimazione delle equazioni e delle relative soluzioni sia fatta dentro  $R$
- Finite Element (FE)
- Finite Difference (FD)

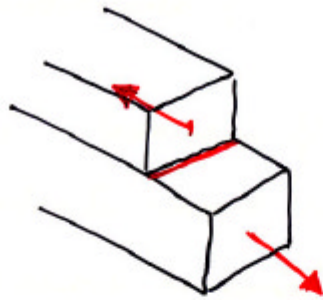
## • Boundary Type Methods

- Richiedono che l'approssimazione sia fatta solamente sul bordo  $C$  di  $R$
- Boundary Element (BE)
- Boundary Integral Equations (BIE)

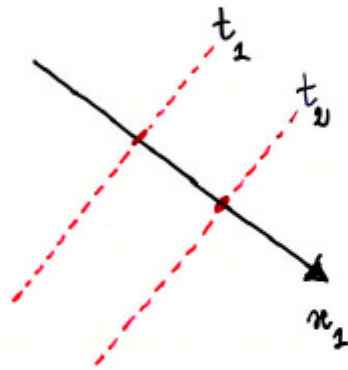


## Esempio

Propagazione di un crack planare pure in-plane (mode II)



$$u = u(x_1, t)$$



fronte di rottura istantaneo

**BIE** : le soluzioni  $u, v, t$  vengono costruite partendo dalle soluzioni elementari ( $G_{ij}$ );

nessuna discretizzazione è fatta nel mezzo, ma solo la linea di propagazione della frattura ( $x_1$ ) è discretizzata;

la soluzione viene calcolata considerando solo ciò che accade al fronte di rottura all'istante attuale e tutto ciò che è accaduto nella linea di frattura nel passato.

**FD** : tutto il mezzo elastico che circonda la linea di propagazione del crack (asse  $x_2$ ) viene considerato e discretizzato ;

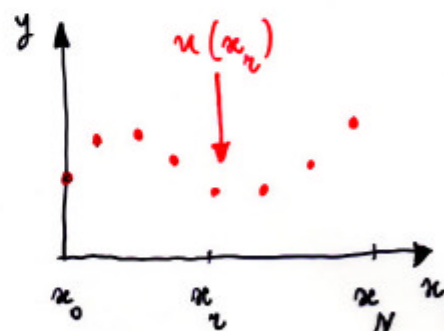
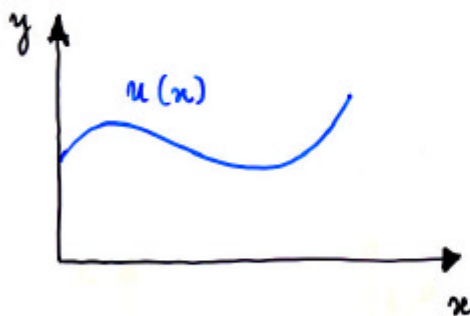
tutti i fenomeni fisici che avvengono nel mezzo circostante possono essere inclusi nel modello (p.e. migrazione di fluidi, presenza di foglie secondarie);

le proprietà del mezzo circostante possono essere disomogenee (virtualmente ogni punto di  $R$  può godere di proprietà peculiari), mentre nel caso BIE esse devono essere omogenee per assunzione a priori.

## FINITE DIFFERENCE (FD) APPROACH

- 1) Il dominio  $R$  delle soluzioni di una assegnata PDE è suddiviso in un numero finito di *mesh points* (o *nodal points* o semplicemente *nodes*)
- 2) Consideriamo, per semplicità, una funzione continua  $f(x)$  della variabile indipendente  $x$ . La suddivisione del dominio  $R = x > 0$  è tale che:

$$u(x_n) \equiv u(xh) \equiv u_n, \quad n = 0, 1, \dots, N$$

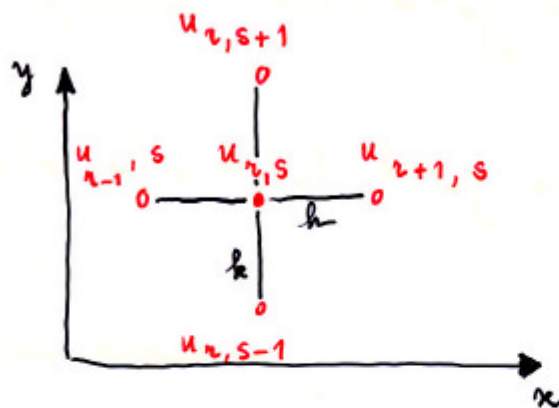


L'intero  $n$  denota quindi, nell'ipotesi di spaziatura  $h$  costante in tutto il dominio, la posizione del punto nodale in maniera univoca.

In caso di 2 dimensioni spaziali risulta:

$$u(x_r, y_s) \equiv u(rh, sk) \equiv u_{r,s} \quad , \quad r = 0, \dots, N$$

$$s = 0, \dots, M$$



Rappresentazione di  $u_{r,s}$  e dei suoi primi vicini.

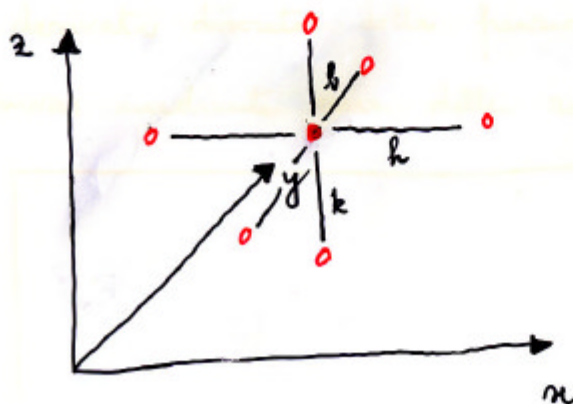
Analogamente nel caso di 3 dimensioni spaziali:

$$u(x_r, y_s, z_v) \equiv u(rh, sk, vl) \equiv u_{r,s,v} \quad ,$$

$$r = 0, \dots, N$$

$$s = 0, \dots, M$$

$$v = 0, \dots, T$$



3) Utilizziamo lo sviluppo in serie di Taylor per esprimere le derivate presenti nella PDE.

Inanzitutto:

$$u(x_2+h) = u(x_2) + h u_x \Big|_2 + \frac{h^2}{2!} u_{xx} \Big|_2 + \dots$$

$$u(x_2-h) = u(x_2) - h u_x \Big|_2 + \frac{h^2}{2!} u_{xx} \Big|_2 - \dots$$

da cui discendiamo:

$$u_x \Big|_2 = \frac{u(x_2+h) - u(x_2)}{h} - \frac{h}{2!} u_{xx} \Big|_2 - \dots$$

$$= \frac{u(x_2) - u(x_2-h)}{h} + \frac{h}{2!} u_{xx} \Big|_2 + \dots$$

La **derivata discreta** della funzione  $u(x)$  può pertanto esprimersi mediante una delle relazioni seguenti:

$$\begin{aligned} u_x \Big|_2 &\approx \frac{u(x_2+h) - u(x_2)}{h} \equiv \frac{u_{2+1} - u_2}{h} \\ &\approx \frac{u(x_2) - u(x_2-h)}{h} \equiv \frac{u_2 - u_{2-1}}{h} \end{aligned}$$

In maniera del tutto analoga si ottengono espressioni approssimate per derivate di ordine superiore.

In questo modo ho sostituito le derivate parziali che comparivano nella PDE con differenze tra valori assunti dalla funzione  $u$  assunti nei mesh points.  
L'espressione analitica di tali differenze discende direttamente dallo sviluppo in serie di Taylor.

4) La serie di Taylor è stata (arbitrariamente) troncata (al 2° ordine, nell'esempio di cui al punto #3).  
Associato all'approssimazione in differenze finite è pertanto un errore di troncamento nella serie di Taylor, caratterizzato dal più grande termine della serie troncata:

$$E_n = \pm \frac{h}{2} u_{xx} \Big|_{\xi} = O(h) \quad , \quad \begin{array}{l} x_2 \leq \xi \leq x_2 + h \\ x_2 - h \leq \xi \leq x_2 \end{array}$$

5) Procedendo con somme e differenze delle espansioni in serie di  $u_{x/2}$  si calcolano altre espressioni per  $u_{x/2}$ :

$$u_{x/2} = \frac{u_{x+1} - u_{x-1}}{2h} \quad (*)$$

per la quale il primo termine troncato è:

$$-\frac{h^2}{6} u_{xxx} \Big|_{\xi} \quad , \quad x_{i-1} \leq \xi \leq x_{i+1}$$

e dunque (\*) ha un errore di troncamento  $\sim O(h^2)$ , invece di  $O(h)$ , come nell'esempio precedente.



TABLE 2.2. Finite Difference Approximations in One Independent Variable

Derivative	Finite Difference Approximation	Order of Error
$u_x _r$	$\frac{u_{r+1} - u_r}{h}$	$O(h)$
	$\frac{u_r - u_{r-1}}{h}$	$O(h)$
	$\frac{u_{r+1} - u_{r-1}}{2h}$	$O(h^2)$
	$\frac{-u_{r+2} + 4u_{r+1} - 3u_r}{2h}$	$O(h^2)$
	$\frac{-u_{r+2} + 8u_{r+1} - 8u_{r-1} + u_{r-2}}{12h}$	$O(h^3)$
$u_{xx} _r$	$\frac{u_{r+1} - 2u_r + u_{r-1}}{h^2}$	$O(h^2)$
	$\frac{-u_{r+2} + 16u_{r+1} - 30u_r + 16u_{r-1} - u_{r-2}}{12h^2}$	$O(h^4)$
$u_{xxx} _r$	$\frac{u_{r+2} - 2u_{r+1} + 2u_{r-1} - u_{r-2}}{2h^3}$	$O(h^2)$
$u_{4x} _r$	$\frac{u_{r+2} - 4u_{r+1} + 6u_r - 4u_{r-1} + u_{r-2}}{h^4}$	$O(h^2)$

## Esempio #1

Si consideri il seguente problema di heat conduction in una dimensione:

$$A(\Phi) = 0$$

ovv:

$$A(\Phi) = \frac{d^2}{dx^2} \Phi + Q$$

Il dominio  $R$  viene discretizzato definendo un certo numero di punti  $\{x_i\}$  equispaziati della distanza  $h \equiv x_{i+1} - x_i$ .

Siano inoltre:

$$\Phi_i \equiv \Phi(x_i) \quad , \quad i = 1, \dots, N$$

$$Q_i \equiv Q(x_i)$$

Potiamo scrivere:

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right|_{x_i} = \frac{\Phi_{i+1} - \Phi_{i-1}}{2h}$$

$$\left. \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right|_{x_i} = \frac{\Phi_{i+1} - 2\Phi_i + \Phi_{i-1}}{h^2}$$

da cui segue:

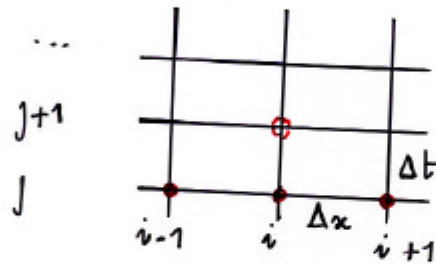
$$\frac{1}{h^2} (\Phi_{i+1} - 2\Phi_i + \Phi_{i-1}) + Q_i = 0$$

## Esempio #2

Consideriamo ora il problema non stazionario :

$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta x^2} - \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta t} = 0$$

- Questa è una **formulazione esplicita**, poiché possiamo risolvere esplicitamente per l'incognita attuale  $u_{i,j+1}$ .

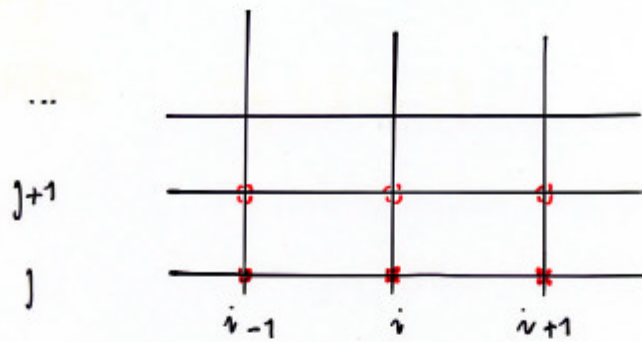


formulazione  
esplicita

- Sia ora  $\theta \in [0,1]$ . Possiamo anche scrivere :

$$\begin{aligned} \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta t} &= (1-\theta) \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \\ &+ \theta \frac{u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}}{\Delta x^2} \end{aligned} \quad (*)$$

che risulta una **formulazione implicita**, poiché coinvolge 3 incognite  $u_{i-1,j+1}$ ,  $u_{i,j+1}$ ,  $u_{i+1,j+1}$ .



formulazione  
implicita

Si completerà quindi l'equazione con altre espressioni analoghe per  $i+1$ ,  $j+1$ , che saranno accoppiate a (\*).

### Esempio # 3

PDE 1o ordine :  $u_x + b u_y = 0$

Finite Difference Form	Symbolic Difference	Stability	Explicit or Implicit	Computational Molecule
$\frac{u_{r+1,s} - u_{r-1,s}}{2h} + b \frac{u_{r,s+1} - u_{r,s-1}}{2k} = 0$	<b>CENTRAL CENTRAL</b>	$\frac{bh}{k} \ll 1$	<b>Explicit</b>	
$\frac{u_{r+1,s} - u_{r,s}}{h} + b \frac{u_{r,s+1} - u_{r,s-1}}{2k} = 0$	<b>FORWARD CENTRAL</b>	Unstable	<b>Explicit</b>	
$\frac{u_{r+1,s} - u_{r-1,s}}{2h} + b \frac{u_{r,s} - u_{r,s-1}}{k} = 0$	<b>CENTRAL BACKWARD</b>	Unstable	<b>Explicit</b>	
$\frac{u_{r+1,s} - u_{r,s}}{h} + b \frac{u_{r,s} - u_{r,s-1}}{k} = 0$	<b>FORWARD BACKWARD</b>	$\frac{bh}{k} \ll 1$	<b>Explicit</b>	
$\frac{u_{r+1,s} - u_{r-1,s}}{2h} + b \frac{u_{r+1,s+1} - u_{r+1,s-1}}{2k} = 0$	<b>CENTRAL CENTRAL (2+1)</b>	Stable	<b>Implicit</b>	
$\frac{u_{r+1,s} - u_{r,s}}{h} + b \frac{u_{r+1,s+1} - u_{r+1,s-1}}{2k} = 0$	<b>FORWARD CENTRAL (2+1)</b>	Stable	<b>Implicit</b>	
$\frac{u_{r+1,s} - u_{r,s}}{h} + b \frac{u_{r+1,s} - u_{r+1,s-1}}{k} = 0$	<b>FORWARD BACKWARD (2+1)</b>	Stable	<b>Explicit Implicit</b>	

• : incognite, da determinare all' iterazione attuale

## Estensione al caso 2-dimensionale

Sia ora:  $u = u(x, y)$

Valgono:

$$\begin{array}{l} s(y) \\ \text{COSTANTE} \end{array} u_x \Big|_{r,s} \equiv \frac{\partial}{\partial x} u_{r,s} = \frac{u_{r+1,s} - u_{r,s}}{h} + \mathcal{O}(h)$$

$$\begin{array}{l} r(x) \\ \text{COSTANTE} \end{array} u_y \Big|_{r,s} \equiv \frac{\partial}{\partial y} u_{r,s} = \frac{u_{r,s+1} - u_{r,s}}{k} + \mathcal{O}(k)$$

$$u_{xx} \Big|_{r,s} = \frac{u_{r+1,s} - 2u_{r,s} + u_{r-1,s}}{h^2} + \mathcal{O}(h^2)$$

$$u_{yy} \Big|_{r,s} = \frac{u_{r,s+1} - 2u_{r,s} + u_{r,s-1}}{k^2} + \mathcal{O}(k^2)$$

$$\begin{aligned} u_{xy} \Big|_{r,s} &\equiv \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} u_{r,s} = \\ &= \frac{1}{2h} \left\{ \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{r+1,s} - \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{r-1,s} \right\} + \mathcal{O}(h^2) = \\ &= \frac{1}{2h} \frac{1}{2k} \left( u_{r+1,s+1} - u_{r-1,s+1} - u_{r+1,s-1} + \right. \\ &\quad \left. + u_{r-1,s-1} \right) + \mathcal{O}(h^2) + \mathcal{O}(k^2) \end{aligned}$$

TABLE 2.3. Finite Difference Approximations in Two Independent Variables with  $h = k$ .

Derivative	Finite Difference Approximation	Order of Error
$u_x _{r,s}$	$\frac{u_{r+1,s} - u_{r,s}}{h}$	$O(h)$
	$\frac{u_{r,s} - u_{r-1,s}}{h}$	$O(h)$
	$\frac{u_{r+1,s} - u_{r-1,s}}{2h}$	$O(h^2)$
	$\frac{-u_{r+2,s} + 4u_{r+1,s} - 3u_{r,s}}{2h}$	$O(h^2)$
	$\frac{u_{r+1,s+1} - u_{r-1,s+1} + u_{r+1,s-1} - u_{r-1,s-1}}{4h}$	$O(h^2)$
$u_{xx} _{r,s}$	$\frac{u_{r+1,s} - 2u_{r,s} + u_{r-1,s}}{h^2}$	$O(h^2)$
	$\frac{-u_{r+2,s} + 16u_{r+1,s} - 30u_{r,s} + 16u_{r-1,s} - u_{r-2,s}}{12h^2}$	$O(h^4)$
$u_{4x} _{r,s}$	$\frac{u_{r+2,s} - 4u_{r+1,s} + 6u_{r,s} - 4u_{r-1,s} + u_{r-2,s}}{h^4}$	$O(h^2)$
$u_{xy} _{r,s}$	$\frac{u_{r+1,s+1} - u_{r+1,s-1} - u_{r-1,s+1} + u_{r-1,s-1}}{4h^2}$	$O(h^2)$
$u_{xxyy} _{r,s}$	$\frac{1}{h^4} [u_{r+1,s+1} + u_{r-1,s+1} + u_{r+1,s-1} + u_{r-1,s-1} - 2u_{r+1,s} - 2u_{r-1,s} - 2u_{r,s+1} - 2u_{r,s-1} + 4u_{r,s}]$	$O(h^2)$

<sup>a</sup>Note that the forms for  $u_y|_{r,s}, \dots, u_{yy}|_{r,s}$ , and  $u_{4y}|_{r,s}$  follow directly from the above but with  $r$  held constant and  $s$  varying, and  $h$  replaced by  $k$ .

## Applicazione

FD leapfrog scheme with explicit time stepping.  
[ from Andrews, 1976b ]

- Soluzione dell'equazione d'onda (D'Alembert) 1-D

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u = 0 \quad \begin{array}{l} \text{2nd order} \\ \text{HYP PDE} \\ \text{1-D} \end{array} \quad (1)$$

$$u = u(x, t)$$

- Cerchiamo la soluzione nella forma:

$$\begin{aligned} v_t &= K \sigma_x & \begin{array}{l} \text{1st order} \\ \text{PDE system} \end{array} & (2) \\ \sigma_t &= K' v_x \end{aligned}$$

ove:  $v_t \equiv \frac{\partial^2}{\partial t^2} u$ ,  $\sigma_x = \frac{\partial}{\partial x} \sigma$  ed i coefficienti  $K$  e  $K'$  sono valori costanti da determinare. Dalla 1a eq.:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u &\equiv v_t = K \frac{\partial}{\partial t} \sigma \frac{\partial t}{\partial x} = \text{dalla 2a eq.} = \\ &= K K' v_x \frac{\partial t}{\partial x} = K K' \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x} = \\ &= K K' \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\cancel{\partial x}}{\cancel{\partial t}} \frac{\cancel{\partial t}}{\cancel{\partial x}} = K K' \frac{\partial^2}{\partial x^2} u \end{aligned}$$



Pertanto, (1) equivale a (2) se vale:

$$\kappa \kappa' = c_0^2$$

Una possibile scelta è:

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{1}{f} \\ \kappa' &= f c_0^2 \end{aligned}$$

• Ritornando a (2), con le precedenti posizioni, si ha:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} &= \frac{1}{f} \frac{\partial \sigma}{\partial x} && \text{equazione fondamentale dell'elastodinamica} \\ \frac{\partial \sigma}{\partial t} &= f c_0^2 \frac{\partial v}{\partial x} && c_0: \text{wave speed} \end{aligned} \right.$$

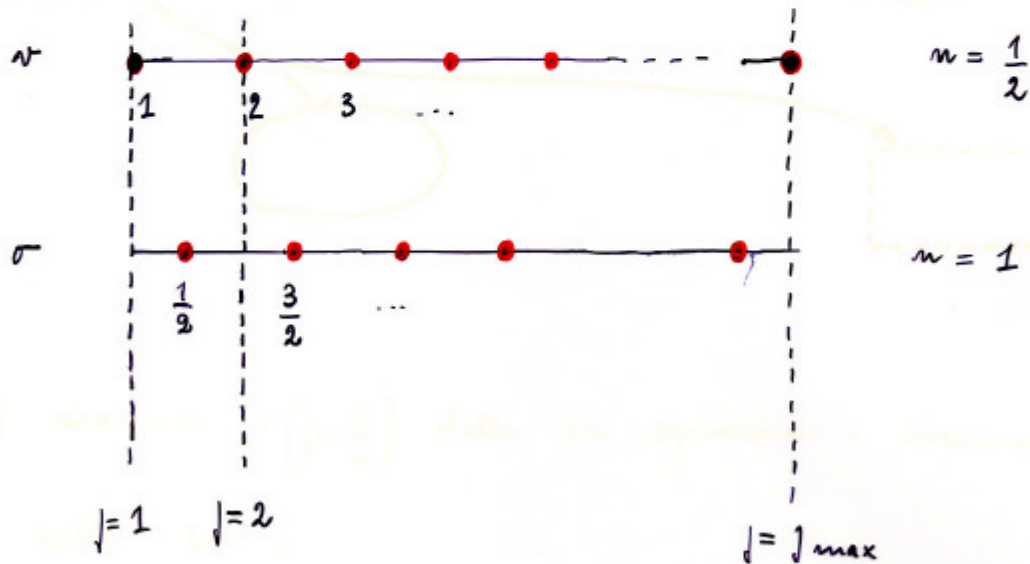
	Space	Time
$v$	$j$	$n - \frac{1}{2}$
$\sigma$	$j + \frac{1}{2}$	$n$

Il sistema (2) discretizzato diviene quindi:

$$\frac{v(j, n + \frac{1}{2}) - v(j, n - \frac{1}{2})}{\Delta t} = \frac{1}{f} \frac{\sigma(j + \frac{1}{2}, n) - \sigma(j - \frac{1}{2}, n)}{\Delta x}$$

$$\frac{\sigma(j + \frac{1}{2}, n + 1) - \sigma(j + \frac{1}{2}, n)}{\Delta t} = \rho c_0 z \frac{v(j + 1, n + \frac{1}{2}) - v(j, n + \frac{1}{2})}{\Delta x}$$

A  $t = 0^*$  le condizioni iniziali sono:



$$* \quad t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = \frac{1}{2} & \text{per } v \\ n = 1 & \text{per } \sigma \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N} \setminus \{0\})$$

Dunque, a  $t=0$ , per le condizioni iniziali:

$$v(j, \frac{1}{2}) \quad \text{noto } \forall j \in [1, j_{\max}]$$

$$\sigma(j-\frac{1}{2}, 1) \quad \text{noto } \forall j \in [1, j_{\max}]$$

$\Downarrow$

$$\text{è noto anche } \sigma(j+\frac{1}{2}, 1) \quad \forall j \in [1, j_{\max}]$$

•  $n=1$   
        

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{v(j, \frac{3}{2}) - v(j, \frac{1}{2})}{\Delta t} = \frac{1}{\rho} \frac{\sigma(j+\frac{1}{2}, 1) - \sigma(j-\frac{1}{2}, 1)}{\Delta x} \\ \frac{\sigma(j+\frac{1}{2}, 2) - \sigma(j+\frac{1}{2}, 1)}{\Delta t} = \rho c_0^2 \frac{v(j+1, \frac{3}{2}) - v(j, \frac{3}{2})}{\Delta x} \end{array} \right.$$

i) ricaviamo  $v(j, \frac{3}{2})$  dalla 1a equazione e inseriamo nella 2a;

ii) La 1a equazione vale  $\forall j \in [1, j_{\max}]$  e dunque possiamo anche scrivere:

$$\frac{v(j+1, \frac{3}{2}) - v(j+1, \frac{1}{2})}{\Delta t} = \frac{1}{\rho} \frac{\sigma(j+\frac{3}{2}, 1) - \sigma(j+\frac{1}{2}, 1)}{\Delta x}$$

e da questa si ricava  $v(j+1, \frac{3}{2})$

iii) ora possiamo ricavare  $\sigma(j+\frac{1}{2}, 2)$  dalla 2a equazione -  
E' altresì noto  $\sigma(j-\frac{1}{2}, 2)$ .

Al termine della PRIMA iterazione conosciamo:

$$v(j, \frac{3}{2}) \quad \forall j \in [1, j_{\max}]$$

$$\sigma(j-\frac{1}{2}, 2) \quad \forall j \in [1, j_{\max}]$$

•  $n=2$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{v(j, \frac{5}{2}) - v(j, \frac{3}{2})}{\Delta t} = \frac{1}{\rho} \frac{\sigma(j+\frac{1}{2}, 2) - \sigma(j-\frac{1}{2}, 2)}{\Delta x} \\ \frac{\sigma(j+\frac{1}{2}, 3) - \sigma(j+\frac{1}{2}, 2)}{\Delta x} = \rho c_0^2 \frac{v(j+1, \frac{5}{2}) - v(j, \frac{5}{2})}{\Delta x} \end{array} \right.$$



## FINITE ELEMENT (FE) APPROACH

- 1) La regione di interesse  $R$  viene suddivisa in un numero finito di **subdomini** ( $\sigma$  **elements**), per esempio blocchi rigidi con una certa geometria) ovvero figure geometriche. La griglia può essere irregolare, ad esempio essa può infittirsi in aree particolari di  $R$ .



Vengono poi identificati i punti di connessione (**punti nodali**) di ciascun subdominio.

Il grigliato può essere modificato (**mesh enhancement**):

- i) suddividendo ulteriormente le celle già esistenti (**mesh enrichment**);
- ii) ridefinendo le celle nella regione  $R$  (**mesh regeneration** o **remeshing**);
- iii) riproponendo diversamente i nodi, lasciando costante il # totale di celle (**r-refinement**).

2) Implementazione del metodo dei residui pesati (method of weighted residuals, MWR). La funzione  $u(\cdot)$  è rimpiazzata da un' approssimazione in serie finita :

$$u(\cdot) \approx \hat{u}(\cdot) \equiv \sum_{j=1}^N V_j \Phi_j(\cdot)$$

ove:  $\{V_j\}_{j=1, \dots, N}$  sono coefficienti da determinarsi e  $\{\Phi_j\}_{j=1, \dots, N}$  sono funzioni, definite in generale nel dominio spazio-temporale e soddisfano le condizioni al contorno. Tali funzioni sono denotate come *shape functions*, *basis functions* od *interpolating functions*.

3) Sostituiamo  $\hat{u}(\cdot)$  nella PDE assunta nella forma:

$$Lu(\cdot) - f = 0$$

Ottenendo dunque il residuo  $R$  :

$$L\hat{u}(\cdot) - f = R(\cdot)$$

4) L'obiettivo è dunque quello di determinare, una volta assegnate  $\{\Phi_i\}_{i=1, \dots, N}$ , i coefficienti moltiplicativi  $\{U_i\}$ .  
 Per esempio richiediamo:

$$\int_t dt \int_V dV R(\cdot) = 0$$

ovvero minimizziamo  $R(x)$ . Poiché sono necessarie  $N$  equazioni per determinare i coefficienti  $\{U_i\}$ , introduciamo le funzioni peso  $\{w_i\}_{i=1, \dots, N}$ . Otterremo allora:

$$\int_t dt \int_V dV w_i(\cdot) R(\cdot) = 0, \quad i=1, \dots, N$$

5) Tre sono i metodi principalmente utilizzati per assegnare le funzioni peso  $\{w_i\}$ :

### Metodo di Galerkin

Le funzioni peso coincidono con le funzioni di base:

$$w_i = \Phi_i, \quad i=1, \dots, N$$



Allora avremo la condizione di minimizzazione dei residui posti nella forma:

$$\int_t dt \int_V dV R(\cdot) \Phi_i(\cdot) = 0 \quad , \quad i = 1, \dots, N$$

che rappresenta la condizione di ortogonalità di  $R(\cdot)$  rispetto alle funzioni di base  $\{\Phi_i\}_i$ . Il metodo di Galerkin è altresì definito *chapeau function*.

### Metodo del Subdominio

Supponiamo di avere discretizzato l'intero volume  $V$  in  $N$  subdomini  $V_i$  t.c.  $\bigcup_{i=1}^N V_i = V$ ,  $V_i \cap V_j = \{\}$ .

Siano :

$$W_i = \begin{cases} 1 & \vec{x} \in V_i \\ 0 & \vec{x} \notin V_i \end{cases} \quad , \quad i = 1, \dots, N$$

### Metodo della collocazione

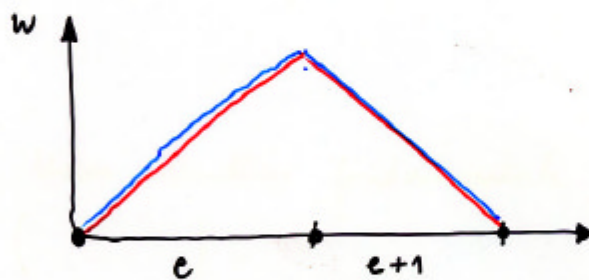
È il più semplice metodo di implementazione e prevede che siano:

$$W_i = \delta(\vec{x} - \vec{x}_i) \quad , \quad i = 1, \dots, N$$

È la condizione di minimizzazione dei residui pesati assume la forma:

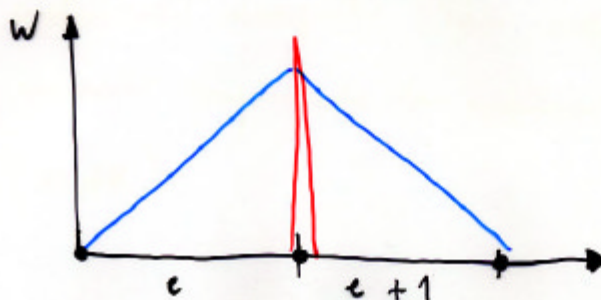
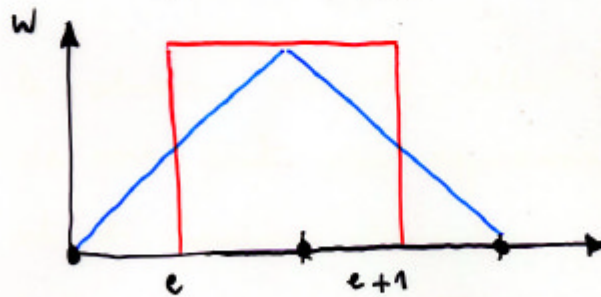
$$\int_t dt \int_V dV R(\cdot) \delta_i(\cdot) = 0 \quad , \quad i = 1, \dots, N$$

che indica che  $R$  è nullo in corrispondenza dei punti di collocazione  $(x_i, y_i, z_i, t_i)$ . Non richiede l'integrazione e genera le  $N$  equazioni richieste per determinare i coefficienti incogniti  $\{U_i\}_{i=1, \dots, N}$ .



— : basis functions

— : weighting functions



## FE vs. FD # 1

- **FD** : blocco costruttivo fondamentale = punto discreto (point, node, mesh point, grid point);

le derivate della PDE sono espresse usando l'espansione in serie di Taylor. Ogni termine di tale serie è calcolato in un punto ed è rappresentato dalle differenze tra i valori di funzioni (le soluzioni, incognite, della PDE assegnata) calcolati in differenti punti.

- **FE** : blocco costruttivo fondamentale = subdominio di  $R$  (element);

le soluzioni, incognite, della PDE sono rimpiazzate da una finite serie approximation, costituita da set di funzioni elementari (basis functions) e da coefficienti incogniti. Tali coefficienti sono determinati imponendo la minimizzazione dei residui (MWR).

## BOUNDARY INTEGRAL EQUATION (BIE) APPROACH

- 1) I metodi di tipo BIE riducono la dimensionalità del problema: un problema che coinvolge un'area  $R$  viene trattato come un problema relativo alla linea  $C$  che rappresenta il bordo di  $R$ .
- 2) Matematicamente si fonda sulla ricerca delle funzioni di Green, soluzioni di problemi PDE elementari.
- 3) Risulta particolarmente efficace in casi in cui le condizioni al contorno siano assegnate su boundaries complicate geometricamente; viene applicato in molteplici ambiti (elastostatica, elastodinamica, plasticità, viscoelasticità, termoelasticità, trasferimento di calore, flusso di fluidi, analisi di fratturazione, acustica, ...).
- 4) Richiede un massiccio sviluppo analitico, il quale è preponderante all'utilizzo del calcolatore.

## Esempio

Si consideri il problema dinamico spontaneo per una foglia piana, di tipo 2-D (in cui le soluzioni sono del tipo :

$$u_1(x_1, t), \quad \dot{u}_1(x_1, t), \quad \tau_1(x_1, t) \quad ).$$

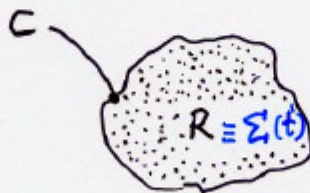
- EQUAZIONE FONDAMENTALE DELL' ELASTODINAMICA



- RAPPRESENTAZIONE INTEGRALE DELLA SORGENTE SISMICA:

$$u_i(\vec{x}, t) = \int_0^t dt' \int_{\Sigma(\tau)} ds_{\vec{s}} G_{ij}(\vec{x}, t; \vec{s}, t') \tau_j^P(\vec{s}, t')$$

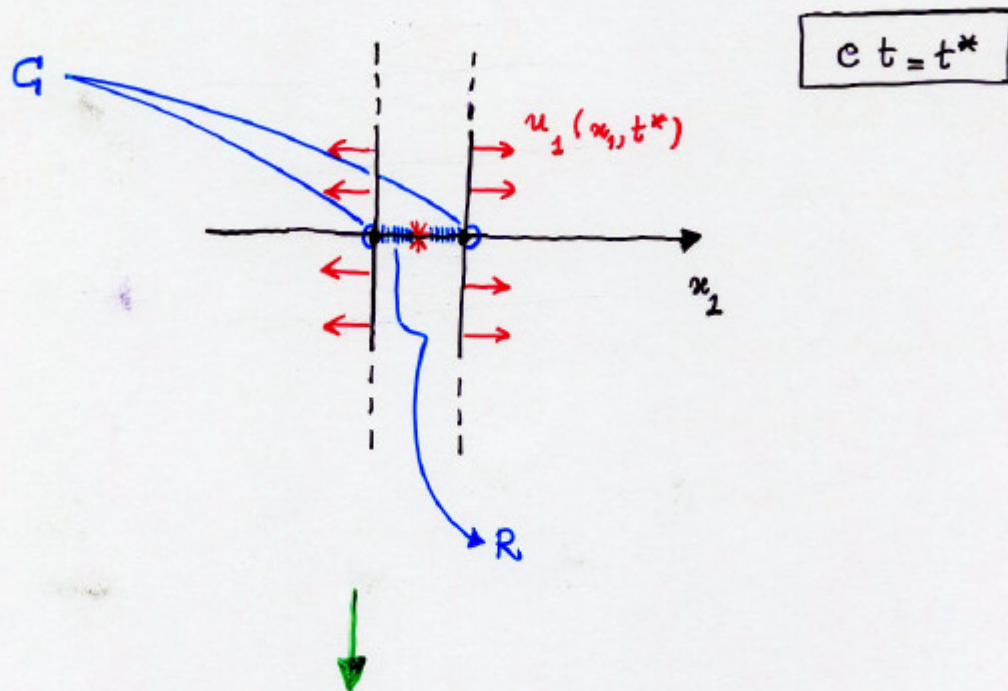
$$u_3(\vec{x}, t) = 0$$



- APPROSSIMAZIONE 2-D :

$$\vec{\tau} = (\tau_1(\xi_1, t'), 0, 0)$$

$$u_1(x_1, t) = \int_0^t dt' \int_{\Sigma_1(\tau)} d\Sigma_1 \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} d\Sigma_2 G_{11}(\xi_1, \xi_2, t') \right\} \cdot \tau_1^P(\xi_1, t')$$



• DISCRETIZZAZIONE DEL PROBLEMA INTEGRALE:

$$u_1(j, m) = \sum_k \sum_n \underbrace{F_{11}(k, n)}_{\text{funzioni di Green } G_{11} \text{ discretizzate}} \tau_1^P(j-k, m-n)$$

$x_1$   $t$

funzioni di Green  
 $G_{11}$  discretizzate

- EQUAZIONE AL CRACK TIP (AL BORDO  $\Gamma$  DEL DOMINIO DI INTERESSE  $R$ ):

$$u_1(j, m) = L(j, m) - c \tau_1^P(j, m)$$

slip istantaneo  
(a  $t = t_m$ );  
INCOGNITO

load, contenente  
tutte le informa-  
zioni relative ai  
fonti di  $R$  che  
hanno già slip-  
pato in preceden-  
za e che sono  
all'interno del  
crack tip

local compliance

cambiamento, rispetto al  
livello di riferimento  
iniziale  $\tau_1^{init}$ , della  
trazione dinamica  
istantanea (a  $t = t_m$ );  
INCOGNITO

||  $u_1$  e  $\tau_1^P$  sono legati tra loro dalla FAULT BOUNDARY  
CONDITION, che include la legge costitutiva. ||