— ESERCIZIO —

Dalla Prova di accertamento per l' A.A. 2003 (XVII Ciclo)

Sia data la seguente ODE:

$$\begin{cases} y'(x) = -y(x) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Secondo il metodo di Eulero, quanti termini nella somma di Taylor sono necessari al fine di ottenere un'accuratezza nella soluzione $\epsilon < 3 \cdot 10^{-2}$ nel punto $x = 1$? Si giustifichi la risposta.

– SOLUZIONE –

• La soluzione della ODE risulta:

$$y^{(e)}(x) = e^{-x}$$

SOLUZIONE ANALITICA ESATTA

Vale:

$$y^{(e)}(1) = e^{-1} = 0.3678$$

• Secondo il Metodo di Eulero sviluppiamo in serie di Taylor la soluzione analitica appena determinata.

ORDINE DI TRONCAMENTO	SOLUZIONE APPROSSIMATA (TRONCATA ALL' ORDINE ...)	VALORE SOLUZIONE APPROSSIMATA IN $x = 1$	$\lvert\Delta\rvert$
0	$y_0^{(a)}(x) = 1$		
1	$y_1^{(a)}(x) = 1 - x$	0	0.3678

2	$y_2^{(a)}(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2}$	0.5	0.132
3	$y_3^{(a)}(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3!}$	$0.\overline{3}$	0.034

Dunque:

All' ordine di troncamento 3 nello sviluppo in serie di Taylor la soluzione approssimata nel punto $x = 1$ differisce dalla soluzione analitica esatta di $0.034 \nless 0.03$.

ACCURATEZZA E RICHIESTA

La risposta è dunque : 4.

– PROBLEMA –

Sia dato l'integrale

$$T(t) = \int_0^t \gamma \operatorname{erf}\left(\frac{w}{2\sqrt{\chi(t-t')}}\right) \tau(t')\, v(t')\, dt' \quad (*)$$

ove:

- γ, w, χ sono costanti assegnate;
- $\tau(t)$, $v(t)$ sono funzioni regolari quanto si vuole e note $\forall t$;
- $\operatorname{erf}(\cdot)$ è la funzione di errore (error function), definita come segue:

$$\operatorname{erf}(z) \underset{df}{=} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-x^2} dx \; .$$

Ipotizziamo ora che la variabile indipendente t sia discretizzata nel seguente modo:

$$t_n = n \Delta t \qquad (**)$$

ove:

- $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$;
- Δt è assegnato e noto.

Si scriva un algoritmo che calcoli (*) nella maniera discreta coerente con (**).

Una volta scritto l'algoritmo richiesto, testare la procedura al calcolatore considerando:

- $W = 0.035$ m

  $\chi = 10^{-6}$ m^2/s

  $\Delta t = 10^{-3}$ s

  τ : funzione di t' dell'ordine di 10^7 Pa

  v : " " " " " di $10^{-4} \div 1$ m/s

  (scegliere a piacere l'andamento funzionale di τ e v in modo da rispettare i ranges suddetti)

  t (estremo di integrazione in (*)) : nel range di 10^{-3} a $1000 \cdot \Delta t$.