Appendice A

Nuclei di deformazione delle rappresentazioni integrali del problema dinamico

A.1. Il tensore di Green per una forza unitaria, puntiforme ed impulsiva in tutto lo spazio

Il nucleo di deformazione G_{ij} che rappresenta la soluzione al problema di Nabarro, introdotto in (1.2.8), viene ora esplicitato seguendo Aki & Richards (1980).

Indicando semplicemente con G_{ij} il tensore $G_{ij}(\mathbf{x},t;\mathbf{0},0)$ e ponendo

$$g_i \equiv \frac{x_i}{r}$$

ove $r \equiv \| \mathbf{x} \| = (x_1 + x_2 + x_3)^{1/2}$, si ha:

$$G_{ij} = \frac{1}{4 p\ r}(\,3\, g_i g_j - d_{ij}\,)\frac{t}{r^3}\left[\mathrm{H}\left(t - \frac{r}{v_P}\right) - \mathrm{H}\left(t - \frac{r}{v_S}\right)\right] + \\ + \frac{1}{4 p\ r}\frac{1}{r}\left[\frac{g_i g_j}{v_P^2} d\left(t - \frac{r}{v_P}\right) + \frac{1}{v_S^2}(\,d_{ij} - g_i g_j\,)\, d\left(t - \frac{r}{v_S}\right)\right]$$

in cui i, j = 1, 2, 3 ed H è la funzione di Heaviside unitaria. Tale espressione, come già osservato, rappresenta lo spostamento che si ha in ($\mathbf{x}$,t) nella direzione i, prodotto da una forza unitaria, puntiforme ed impulsiva applicata, a t = 0, in direzione j, in un punto di R^3 (in questo caso in x = $\mathbf{0}$).

A.2. Il tensore di Green nel caso di un semispazio con superficie libera

La soluzione al problema di Lamb, introdotto nel paragrafo 1.2, viene ora riportata seguendo Richards (1979). Questa infatti è l' espressione più generale di G_{ab} ; una forma semplificata (nel caso di solidi poissoniani, ovvero materiali in cui $n = l\ /\ 2\ (\ l + m\ ) = 0.25$) è presentata, ad esempio, in Kostrov & Das (1988).

Chiariamo innanzitutto il significato dei simboli:

$G_{ab} \equiv G_{ab}\,(\,x_1,x_2,0,t;\mathbf{0},0\,)$	soluzione al problema di Lamb, ovvero componente a (a =1, 2, 3) dello spostamento in (x_1,x_2,0), causato da una forza unitaria, puntiforme ed impulsiva applicata, a t = 0, in direzione b (b = 1, 2, 3), in un punto del semispazio $x_3 \geq 0$ (nel caso esaminato in x = $\mathbf{0}$). x_3 = 0 è una superficie libera;
$\mathbf{x} \equiv (x_1,x_2,0)$	generico punto del piano x_3 = 0;
(r,j)	coordinate polari (in x_3 = 0) di $\mathbf{x}$: $j \equiv$ ang ($\mathbf{x_1}$,$\mathbf{x}$), $r \equiv (\,x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2}\,)^{1/2}$;

$$A \equiv \frac{v_P^2}{v_S^2}$$

$$T \equiv \frac{v_P\, t}{r}$$

$$X \equiv -\,\mathrm{i}\,\sqrt{P^2 - 1}$$

$$Y \equiv -\,\mathrm{i}\,\sqrt{P^2 - A^2}$$

H	funzione di Heaviside unitaria;
$\{ R_i \}_{i=1,2,3}$	radici della seguente equazione in P^2 : $(A - 2P^2)^4 - 16\, X^2\, Y^2\, P^4 = 0$;
a, b e c	quantità legate ad $\{ R_i \}$ tramite la relazione:

$$\frac{1}{(A - 2P^2)^4 - 16\, X^2\, Y^2\, P^4} = \\ = \frac{a}{P^2 - R_1} + \frac{b}{P^2 - R_2} + \frac{c}{P^2 - R_3}$$

che fornisce:

$$a^{-1} = 16\,(A - 1)\,(R_1 - R_2)\,(R_3 - R_1)$$

$$b^{-1} = 16\,(A - 1)\,(R_1 - R_2)\,(R_2 - R_3)$$

$$c^{-1} = 16\,(A - 1)\,(R_3 - R_1)\,(R_2 - R_3)$$

$$c_1 \equiv -2\, a\,(A - R_1)\sqrt{1 - R_1} \qquad c_2 \equiv 2\, b\, A\,(A - R_2)\sqrt{1 - R_2}$$

$$c_3 \equiv -2\, c\, A\,(R_3 - A)\sqrt{R_3 - 1} \qquad c_4 \equiv A \,/\, (8A - 8)$$

$$c_5 \equiv -2\, a\, A\, R_1\,(1 - R_1)\sqrt{A - R_1} \qquad c_6 \equiv 2\, b\, A\, R_2\,(1 - R_2)\sqrt{A - R_2}$$

$$c_7 = -2\, c\, A\, R_3\,(R_3 - 1)\sqrt{R_3 - A}$$

$$C_1 \equiv 4\, b\, A\,(A - R_2)(1 - R_2)$$

$$C_2 \equiv 4\, b\, A\,(A - R_2)$$

$$C_3 \equiv b\, A\,(A - 2R_2)^2\,(1 - R_2)$$

$$P'^2 \equiv (T^2 - 1)\sin^2 c + 1 \qquad P''^2 \equiv (A - 1)\sin^2 g + 1$$

Alcune componenti del tensore G_{ab} possono essere scritte in forma chiusa:

$$G_{11} = \frac{1}{p\ m\ r}\left[\, I_1 \cos^2 j \, - I_2 \sin^2 j \,\right]$$

$$G_{12} = G_{21} = \frac{1}{p\ m\ r}\left[\, I_1 + I_2 \right] \cos j \, \sin j$$

$$G_{22} = \frac{1}{p\ m\ r}\left[\, I_1 \sin^2 j \, - I_2 \cos^2 j \,\right]$$

$$G_{33} = \frac{1}{p\ m\ r} I_3$$

ove:

1) *T* £ 1

$$I_1 = I_2 = I_3 = 0$$

2) 1 < *T* < v_P / v_S

2.1) n < **0.263** ($\Leftrightarrow v_P^{\,2} / v_S^{\,2} < 3.11$)

$$I_1(T) = T^2 \left[\frac{c_1}{\sqrt{T^2 - R_1}} - \frac{c_2}{\sqrt{T^2 - R_2}} - \frac{c_3}{\sqrt{R_3 - T^2}} \right]$$

$$I_2(T) = -c_4 + c_1 \sqrt{T^2 - R_1} - c_2 \sqrt{T^2 - R_2} + c_3 \sqrt{R_3 - T^2}$$

$$I_3(T) = c_4 - \frac{c_5}{\sqrt{T^2 - R_1}} + \frac{c_6}{\sqrt{T^2 - R_2}} - \frac{c_7}{\sqrt{R_3 - T^2}}$$

2.2) n > **0.263**

$$I_1(T) = -T^2 \left[\Re\mathrm{e}\left(\frac{C_1}{N(T)} \right) + \frac{c_3}{\sqrt{R_3 - T^2}} \right]$$

$$I_2(T) = -c_4 - \Re\mathrm{e}\left(C_2 \, N(T) \right) + c_3 \sqrt{R_3 - T^2}$$

$$I_3(T) = c_4 + \Re\mathrm{e}\left(\frac{C_3}{N(T)} \right) - \frac{c_7}{\sqrt{R_3 - T^2}}$$

ove $N(T) \equiv [\, (1 - R_2)\, (T^2 - R_2)\,]^{1/2}$

3) v_P / v_S < T < v_P / v_R

$$I_1(T) = \frac{1}{2} - \frac{2\,c_3\,T^2}{\sqrt{R_3 - T^2}}$$

$$I_2(T) = -2\,c_4 + 2\,c_3\sqrt{R_3 - T^2}$$

$$I_3(T) = 2\,c_4 - \frac{2\,c_7}{\sqrt{R_3 - T^2}}$$

4) T > v_P / v_R

$$I_1(T) = 1/2$$

$$I_2(T) = -\,2\,c_4$$

$$I_3(T) = 2\,c_4$$

Altre componenti di G_{ab} , invece, rimangono da calcolare per via numerica:

$$G_{13} = \frac{1}{p\ m\,r} I_4 \cos j$$

$$G_{23} = \frac{1}{p\ m\,r} I_4 \sin j$$

$$G_{31} = -\frac{1}{p\ m\,r} I_4 \cos j$$

$$G_{32} = -\frac{1}{p\ m\,r} I_4 \sin j$$

ove:

$$I_4(T)=\begin{cases} 0 & ,T<1 \\ \dfrac{2\,T\,A}{p}\displaystyle\int_0^{\frac{p}{2}} \dfrac{(P'^2-1)\sqrt{A-P'^2}\,(A-2P'^2)}{(A-2P'^2)^4-16X^2Y^2P'^4}\,\mathrm{d}c & ,1<T<\dfrac{v_P}{v_S} \\ \dfrac{2\,T\,A}{p}\displaystyle\int_0^{\frac{p}{2}} \dfrac{(P''^2-1)(A-P''^2)(A-2P''^2)}{\sqrt{T^2-P''^2}\left[(A-2P''^2)^4-16X^2Y^2P''^4\right]}\,\mathrm{d}g\;+ & \\ \qquad -\dfrac{\mathrm{H}\left(T-\dfrac{v_P}{v_R}\right)c_8\,T}{\sqrt{T^2-\;R_3}} & ,T>\dfrac{v_P}{v_R}\end{cases}$$