Appendice B

La legge di Ruina come limite della legge di Dieterich. Le variabili di stato

Supponiamo risulti

$$\frac{A}{t_*} \ln\left(\frac{v_*}{v} + 1 \right) << 1 \tag{B.1}$$

e che la variazione del numeratore di (1.3.15a) sia arbitrariamente piccola paragonata a quella del denominatore. Sotto tali ipotesi, sviluppando in serie di Taylor con punto iniziale 0 la (1.3.15a) ed arrestandosi al primo ordine, si ottiene l' equazione costitutiva di Dieterich in forma ridotta (1.3.16a):

$$\begin{aligned} t &\cong \left[t_* \; B \ln\left(\frac{F\, v_*}{L} + 1 \right) \right] \left[1 - \frac{A}{t_*} \ln\left(\frac{v_*}{v+1} \right) \right] = \\ &= t_* - A \ln\left(\frac{v_*}{v+1} \right) + B \ln\left(\frac{F\, v_*}{L} + 1 \right) \end{aligned} \tag{B.2}$$

Ruina (1983), sostituendovi l' espressione

$$F = \frac{L}{v_*} \mathrm{e}^{q} \tag{B.3}$$

ricavò:

$$\begin{aligned} t &\cong t_* - A \ln\left(\frac{v_*}{v} + 1 \right) + B \ln\left(\frac{L\,\mathrm{e}^{q}}{v_*} \frac{v_*}{L} + 1 \right) = \\ &= t_* - A \ln\left(\frac{v_*}{v} + 1 \right) + B \ln\left(\mathrm{e}^{q} + 1 \right) \end{aligned} \tag{B.4}$$

Supponendo inoltre che $\mathrm{e}^{q} >> 1$ (cioè che $F\, v_* / L >> 1$) e che $v_* / v >> 1$ risulta:

$$t \cong t_* + A \ln\left(\frac{v}{v_*} \right) + B\,q \tag{B.5}$$

che è del tutto equivalente a (1.3.17a) con la posizione $q' \equiv B\,q$. Nel corso della tesi, per semplicità di notazione, la legge di Ruina e la corrispondente equazione evolutiva per la variabile di stato sono state scritte con q anziché con q'.

La (B.3) suggerisce un esplicito legame tra la variabile di stato utilizzata da Dieterich e quella introdotta da Ruina. In entrambi i modelli la variabile di stato è una funzione della sola coordinata temporale e non della posizione x sulla superficie di faglia. Ruina assunse la definizione della variabile di stato proposta da Rabinowicz (1958), nella quale la dipendenza dal tempo è invece implicita:

$$q\left(d(t) \right) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{d(t)} \mathrm{e}^{-\frac{d(t) - d'(t)}{L}}\, Y\left(\frac{v\left(d'(t) \right)}{v_*} \right) \mathrm{d}d' \tag{B.6}$$

in cui d rappresenta lo scorrimento. Poiché il mio scopo è quello di ottenere una legge evolutiva per q, al fine di poter portare l' operatore di derivata d/dt sotto il segno di integrale è assai utile separare il dominio di integrazione negli intervalli $]-\infty, d_0\,]$ e $]\,d_0, d\,]$:

$$q = \mathrm{e}^{-\frac{d-d_0}{L}}\, q(d_0) + \frac{1}{L}\int_{d_0}^{d} \mathrm{e}^{-\frac{d-d'}{L}}\, Y\!\left(\frac{v(d')}{v_*}\right)\mathrm{d}d' \tag{B.7}$$

Derivando q rispetto al tempo, tenendo conto che $(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)q = (\mathrm{d}q/\mathrm{d}d)\cdot(\mathrm{d}d/\mathrm{d}t) = v\cdot(\mathrm{d}q/\mathrm{d}d)$, si ha:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}q = v\Bigg\{ & -\frac{1}{L}\,\mathrm{e}^{-\frac{d-d_0}{L}}\,\frac{1}{L}\int_{-\infty}^{d_0}\mathrm{e}^{-\frac{d_0-d'}{L}}\,Y\!\left(\frac{v(d')}{v_*}\right)\mathrm{d}d' + \\ & -\frac{1}{L^2}\,\mathrm{e}^{-\frac{d}{L}}\int_{d_0}^{d}\mathrm{e}^{\frac{d'}{L}}\,Y\!\left(\frac{v(d')}{v_*}\right)\mathrm{d}d' + \frac{1}{L}\,\mathrm{e}^{-\frac{d}{L}}\left[\mathrm{e}^{\frac{d}{L}}\,Y\!\left(\frac{v(d')}{v_*}\right)\right]\Bigg|_{d=d'}\Bigg\} = \\ & = \frac{v}{L}\left[-q(d) + Y\!\left(\frac{v(d)}{v_*}\right)\right]\end{aligned} \tag{B.8}$$

Se ora si sceglie $Y = \ln(v/v_*)$, sostituendo tale espressione in (B.7), si ricava:

$$q = B\ln\!\left(\frac{F\,v_*}{L}\right) \tag{B.9}$$

che invertita porge $F = (L/v_*)\,\mathrm{e}^{q/B}$, la quale non è in contrasto con (B.3) poiché, per quanto osservato in precedenza, q in (B.9) è in realtà $q' \equiv B\,q$.

Se infine si sostituisce la Y così scelta in (B.7) si ottiene:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}q = -\frac{v}{L}\left[q + \ln\!\left(\frac{v}{v_*}\right)\right] \tag{B.10}$$

ove ancora q è $q' \equiv B\,q$ e pertanto si ha (1.3.17a).

Ruina ha altresì mostrato come sia possibile, partendo dalla definizione (B.7) di q, giungere alla legge evolutiva della variabile F (1.3.15b) associata all' equazione costitutiva di Dieterich. Il parametro F tiene conto dell' età media delle aree di contatto tra le superfici che sono soggette a scorrimento, ed in questo senso è lecito parlare di " memoria " del sistema relativamente a configurazioni precedenti. Se si pone $Y = v_*/ v$, sostituendo in (B.7), risulta:

$$q = \frac{F\, v_*}{L} \tag{B.11}$$

D' altra parte, per (B.8), vale la relazione:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} q = \frac{v}{L}\left(\frac{v_*}{v} - q \right) \tag{B.12}$$

Che, in virtù di (B.11), si riscrive come:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} q = \frac{v_*}{L} - \frac{F\, v_*\, v}{L^2} \tag{B.13}$$

Infine, poiché v_* ed L sono costanti, derivando rispetto al tempo (B.11) si ottiene:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} q = \frac{v_*}{L} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F \tag{B.14}$$

e dunque, per confronto, si ricava la (1.3.15b).

Come osservato da Okubo & Dieterich (1986), indipendentemente dalle relazioni analitiche che definiscono le due variabili di stato, esiste una profonda differenza fisica tra la F introdotta da Dieterich e la q di Ruina: mentre Dieterich (1981) interpreta F come un tempo medio di contatto tra le superfici che scorrono, ovvero tra le loro asperità microscopiche, Ruina (1983) suggerisce che la sua variabile di stato non sia identificabile con nessuna quantità fisica.