

---

# **1. Stato dell' arte: meccanica della frattura e leggi di attrito**

## **1.1. I processi sismogenetici**

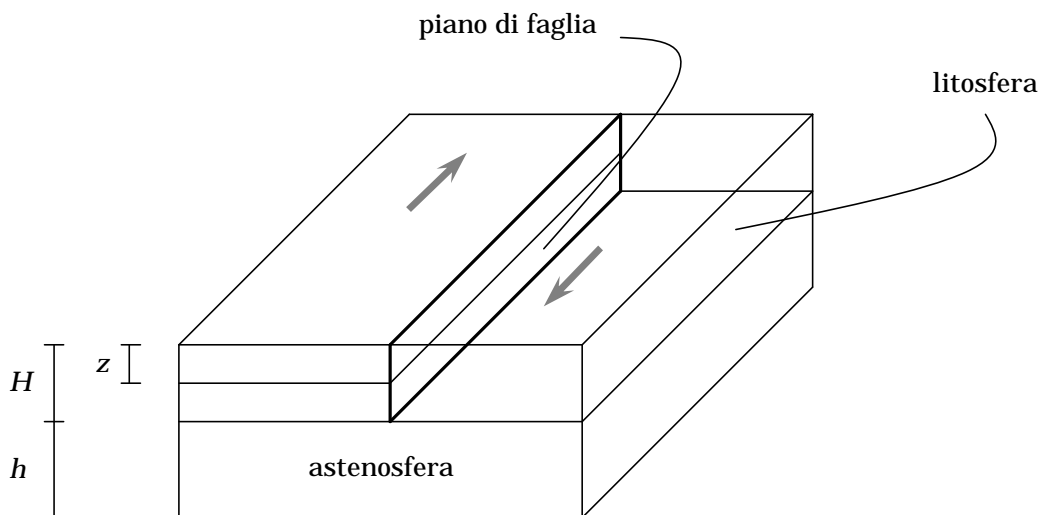
Il processo di emissione di onde elastiche che costituisce l' essenza fisica di un evento sismico è causato dalla propagazione di una frattura in una parte della crosta terrestre che non è in grado di sopportare lo sforzo tettonico accumulato. Nella parte elastico – fragile della Terra tale sforzo determina un lento scorrimento nelle regioni a maggiore profondità e questa continua deformazione produce nelle zone più superficiali della struttura sismogenetica un accumulo di sforzo. Quando viene superata la soglia di attrito, o punto di rottura, caratteristica dei materiali che compongono la struttura sismogenetica stessa, l' energia accumulata sotto forma di deformazione elastica viene rilasciata istantaneamente, producendo così una frattura che si propaga dal punto di maggiore debolezza ( *ipocentro* del terremoto ) e provoca lo scorrimento ( fenomeno della *dislocazione* ) dei due blocchi della faglia. La dislocazione è

pertanto definita come la discontinuità del campo degli spostamenti ( § 1.2.2 ) attraverso la superficie di faglia. L' energia rilasciata durante tale processo in parte è dissipata sotto forma di calore, dovuto all' attrito che si ha tra i due blocchi che scorrono, in parte viene emessa sotto forma di onde elastiche ed in parte spesa per creare la frattura stessa.

Il primo modello che descrive il processo di accumulo di sforzo e di ciclo di carico risale ad H. F. Reid. Nello studio del terremoto della California del 1906, Reid ( 1910 ) presentò la *teoria dell' elastic rebound*, secondo la quale un evento sismico è il risultato di un improvviso rilassamento, o “ rimbalzo ”, della zona sollecitata da uno sforzo accumulato nel passato, più o meno remoto. Le considerazioni di Reid si basano essenzialmente sulla teoria classica della resistenza dei materiali e sull' ipotesi di sistemi lineari. Egli, infine, propose un modello di previsione dei terremoti basato su misure geodetiche, toccando in questo modo una problematica cruciale e di evidente impatto sociale della sismologia.

La grande maggioranza dei terremoti avviene nella crosta terrestre, in una regione che si spinge al più fino ad alcune decine di chilometri di profondità, ovvero nelle zone di subduzione, le quali tuttavia non sono, strettamente parlando, faglie nel senso di blocchi di materiale che scorrono improvvisamente. Numerosi studi volti alla localizzazione degli ipocentri dei terremoti hanno consentito di identificare uno strato, lo *strato sismogenetico* ( Sibson, 1984 ), che si estende fino a circa 20 chilometri di profondità ed in cui possono verificarsi fenomeni di fratturazione. In fig. 1.1 è raffigurato un modello generalizzato di litosfera elastica accoppiata con la astenosfera viscosa, così come proposto per la prima volta da Elsasser ( 1969 ). La litosfera elastica di spessore  $H$  rompe cosismicamente ( ovvero con emissione di onde elastiche ) fino ad una profondità  $z$ , mentre la parte rimanente scorre in maniera asismica ( cioè in modo stabile, senza che sia registrabile un' attività sismica ). Quest' ultima regione è in generale costituita da sedimenti debolmente consolidati e lo scorrimento stabile che in essa ha luogo fu scoperto per la prima volta nella faglia di S. Andreas, nella California centrale. Nella zona ancora più profonda si ha l' astenosfera viscosa, di spessore  $h$ . Una schematizzazione di questo tipo costituisce un esempio di struttura sismogenetica. In realtà, come si osserverà

in seguito ( § 1.2.4 ), le faglie presentano una maggiore complessità per quanto concerne la forma geometrica nonché le caratteristiche reologiche, quali, ad esempio, densità, rigidità e compressibilità delle rocce.



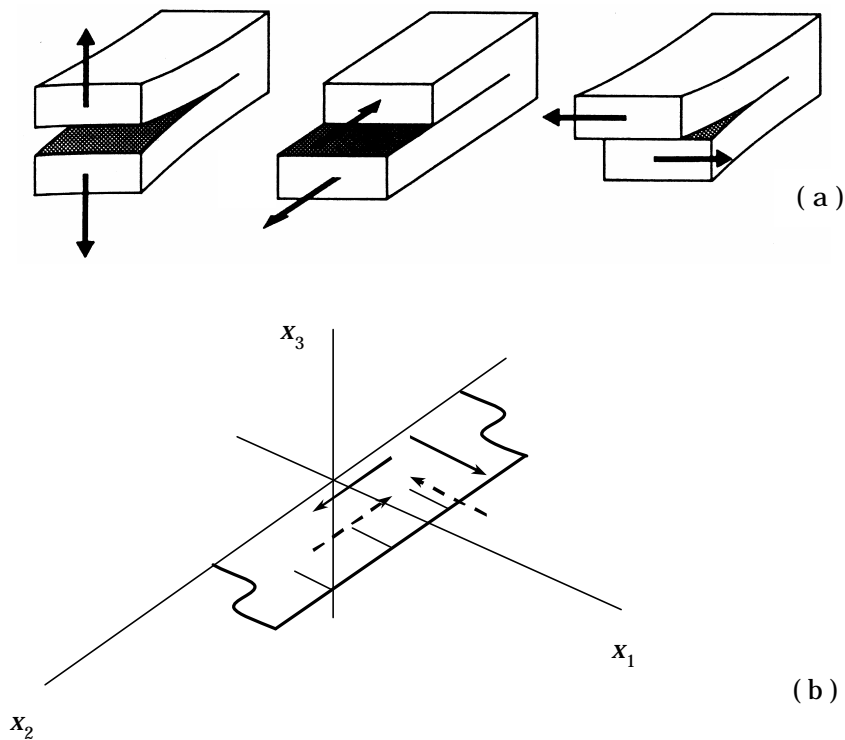
**Fig. 1.1.** Modello generalizzato di fagliazione. La litosfera elastica, in cui si hanno fenomeni di dislocazione, è accoppiata con l' astenosfera viscosa, che scorre in modo continuo ( tratta da Scholz, 1990 ).

In termini di deformazioni crostali, il processo di accumulo e di rilascio di sforzo viene suddiviso in quattro periodi: *presismico*, *cosismico*, *postsismico* ed *intersismico*, mentre il fenomeno di fratturazione è caratterizzato da tre fasi: *nucleazione*, o *iniziazione* ( in cui si innesca il processo dislocativo ), *propagazione* ( in cui la frattura si estende in modo più o meno complesso sulla superficie di faglia ) ed *arresto* ( in cui il fronte di rottura cessa di avanzare ).

Da quanto è stato detto in precedenza scaturisce una ragionevole *definizione di sorgente sismica*: essa è semplicemente la discontinuità dello spostamento in materiali della Terra, dovuta a processi di deformazione tettonica pregressi. Il materiale che circonda la superficie di frattura rimane linearmente elastico. Questa definizione è in sostanziale accordo con quella data da Andrews ( s.d. ), secondo il quale una rottura è un processo

intrinsecamente anelastico che ha luogo in un solido continuo che è in buona approssimazione lineare ed elastico al di fuori della rottura stessa. La sorgente di un campo elastico, a differenza di altre sorgenti di campi con cui è stata confrontata, è pertanto la deviazione del mezzo in cui si trova dal comportamento lineare elastico che lo caratterizza, ovvero, in termini analitici, la deviazione dalla legge ( costitutiva ) di Hooke per un mezzo elastico, omogeneo ed isotropo ( Eshelby, 1956, 1957; Backus & Mulcahy, 1976a, 1976b ).

Il campo degli spostamenti che si ha in seguito ad un crack è stato classificato in tre modi, rappresentati in fig. 1.2a.



**Fig. 1.2.** ( a ) Modi di propagazione di una frattura ( tratta da Scholz, 1990 ). ( b ) Caso particolare di una frattura di taglio. La linea continua indica il fronte e le frecce la direzione di propagazione della rottura. Le frecce più lunghe rappresentano il vettore spostamento: quando esso è sul piano di faglia ed è normale al fronte del crack si hanno fratture in - plane o mode II, quando invece esso è sul piano di faglia e parallelo al fronte si hanno fratture anti - plane o mode III ( tratta da Aki & Richards, 1980 ).

Il *mode I*, o *tensile*, è di apertura, nel senso che lo spostamento è perpendicolare alla superficie di rottura. Vi sono poi due situazioni di cracks di taglio ( fig. 1.2b ): il *mode II*, o *in - plane*, detto anche *dislocazione di bordo* ( *edge dislocation* ), in cui lo spostamento è nel piano di frattura e normale al suo fronte; il *mode III*, o *anti - plane*, detto anche *dislocazione elicoidale* o *a vite* ( *screw dislocation* ) in cui lo spostamento è sempre nel piano di crack, ma è parallelo al fronte.

La disponibilità di informazioni relative a paleoterremoti costituisce uno strumento di fondamentale importanza per comprendere le caratteristiche delle strutture sismogenetiche viste come sistemi isolati, ovvero come elementi di un sistema più complesso ( *segmenti e frammenti di faglia* ). Per terremoti recenti sono disponibili misure di livellazione geodetica, che forniscono i valori del campo degli spostamenti generato da dislocazioni cosismiche, che sono assai importanti per lo studio della sorgente e della velocità di rottura. L' analisi dell' altro osservabile fisico, le onde sismiche, offre due possibilità di indagine: da una parte la conoscenza delle caratteristiche geometriche e dinamiche del moto alla sorgente e dall' altra lo studio della propagazione delle onde stesse dalla sorgente alla stazione di registrazione, mediante il quale si ricavano informazioni concernenti la struttura interna della Terra. Il primo passo nell' analisi dei sismogrammi è la localizzazione nello spazio ( ipocentro ) e nel tempo dell' evento; dalle forme d' onda, invece, è possibile determinare le grandezze che caratterizzano la sorgente sismica ( dimensioni del piano di faglia, momento sismico, magnitudo ).

## **1.2. Fondamenti di meccanica della frattura**

### **1.2.1. Criteri di frattura**

Nell' ambito della meccanica della frattura le condizioni sotto le quali si

verifica la fratturazione sono stabilite da relazioni fisiche chiamate criteri di frattura. Essi stabiliscono se un determinato punto della superficie di faglia abbia raggiunto o meno le condizioni critiche di rottura.

Il criterio di *Griffith* ( 1920, 1924 ) si basa su una condizione di bilanciamento energetico, espresso in termini di flusso di energia. L'assunzione di base è che quando viene formato un nuovo crack è necessaria una crescita dell'energia libera di superficie la quale deve essere fornita dal mezzo circostante affinché la frattura continui ad estendersi.

In termini più quantitativi, se la frattura presente nel mezzo viene ampliata di una quantità  $dA$  verrà spesa una quantità di energia di fratturazione  $dG$ , esprimibile mediante la relazione:

$$dG = G dA \quad (1.2.1)$$

ove  $G$  rappresenta il flusso di energia sul fronte di rottura per unità di area. Griffith stabilisce l'esistenza di un valore critico  $G_c$  di tale flusso e la condizione necessaria affinché il crack si propaghi è che il flusso di energia  $G$  sul fronte raggiunga e superi questo valore critico:

$$G \geq G_c \quad (1.2.2)$$

Una trattazione analitica dettagliata, basata sul bilanciamento energetico che verrà descritto al paragrafo 2.2, è stata compiuta da Scholz ( 1990 ), il quale ricava altresì l'espressione per la tensione esterna di equilibrio ( stress critico ).

*Irwin* ( 1958 ), invece, assegna le condizioni sotto le quali si verifica il fenomeno di fratturazione in termini di concentrazione di sforzo, introducendo il concetto di *stress intensity factor* ( § 1.2.4 ). Egli propone un'espressione per lo sforzo di taglio del tipo:

$$t \propto \frac{K f(q)}{r} \quad (1.2.3)$$

ove  $K$  è appunto il fattore di intensità dello sforzo,  $f(q)$  è una funzione che

dipende dalla posizione ed  $r$  è la distanza che separa un punto dal fronte di rottura.

La condizione per cui una frattura si propaghi è che  $K$  superi un valore critico  $K_c$  tipico del materiale, cioè che nel punto considerato sia verificata la relazione seguente:

$$K \geq K_c \quad (1.2.4)$$

Secondo *Hamano* ( 1975 ) un punto della superficie di faglia rompe quando lo sforzo tettonico di taglio  $t$  supera il valore limite  $t_u$  ( *upper yield strength* ), definito come lo sforzo massimo che il mezzo in esame è in grado di sopportare. In seguito al fenomeno di rottura si manifesta un rilascio di sforzo, che porta  $t$  ad un valore finale  $t_f$ , il quale corrisponde ad un attrito cinetico. Indicato con  $t_0$  il valore dello stress di taglio iniziale, Hamano caratterizza il suo criterio di frattura mediante le relazioni:

$$Dt \equiv t_u - t_0 > 0 \quad (1.2.5a)$$

$$t_0 - t_f \geq 0 \quad (1.2.5b)$$

La prima è più forte della seconda: se lo sforzo iniziale  $t_0$  fosse uguale al valore massimo  $t_u$  il materiale avrebbe già fratturato; è d' altra parte possibile che in (1.2.5b) si abbia l' uguaglianza, anche se Pacor et al. ( 1988 ) hanno mostrato che in questa condizione la frattura non può arrestarsi.

*Il parametro di strength.* La resistenza di un mezzo alla frattura, che come si è visto rappresenta un parametro di estrema importanza nella descrizione di una rottura, viene solitamente descritta mediante una grandezza adimensionale  $S$ , definita *strength*, espressa come segue ( Das & Aki, 1977a, 1977b ):

$$S = \frac{t_u - t_0}{t_0 - t_f} \quad (1.2.6)$$

in cui a numeratore si ha l' aumento di sforzo necessario per iniziare lo

scorrimento e a denominatore la caduta dinamica di sforzo.

Per (1.2.5a) e (1.2.5b)  $S$  risulta sempre positivo. Una zona della superficie di faglia con un basso valore dello strength avrà maggiore probabilità di rompere rispetto ad una zona con alto  $S$ . In generale, infatti,  $S$  risulta una proprietà locale della faglia ( $S = S(x)$ ), essendo tutti gli sforzi dipendenti dalla posizione  $x$ , ed effetti della variazione di  $S$  sono importanti, per esempio nella determinazione della velocità di rottura (Harris & Day, 1993).

### 1.2.2. Rappresentazione dinamica della sorgente sismica

A differenza della meccanica dei corpi rigidi (meccanica classica), il cui campo di indagine consiste nello studio del moto di un corpo come un tutto, la meccanica dei continui si occupa dei cambiamenti di forma che i mezzi subiscono durante un determinato processo fisico. Così, invece di prendere in considerazione la posizione istantanea  $(x(t), y(t), z(t))$  di un generico punto  $P$  del mezzo, si farà uso del campo degli spostamenti  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ , in generale non stazionario, definito come la differenza tra la posizione  $\mathbf{x}'$  del punto spostato e la sua posizione  $\mathbf{x}$  prima dello spostamento:  $\mathbf{u} = \mathbf{x}' - \mathbf{x}$ .

La seconda equazione della dinamica, in teoria dell'elasticità, assume la forma

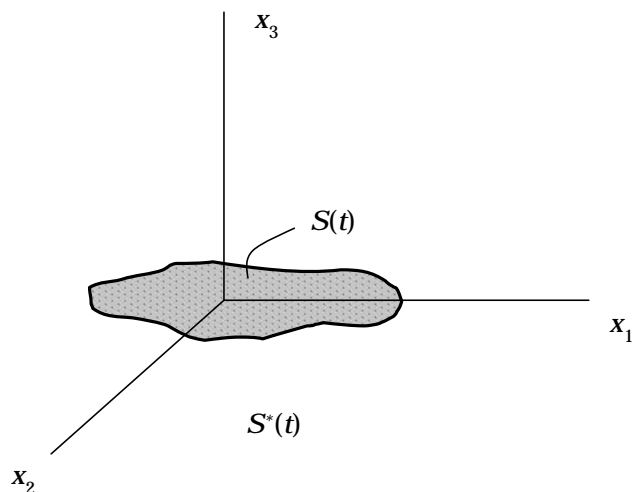
$$\mathbf{r} \ddot{u}_i = f_i + \mathbf{s}_{ij,j} \quad (1.2.7)$$

ove  $\mathbf{r}$  è la densità (cubica, o volumetrica, di massa) del mezzo a cui il punto  $P$  appartiene,  $f_i$  la  $i$ -esima componente della forza di volume applicata — ovvero della risultante di un sistema di forze di volume — e  $\mathbf{s}_{ij}$  il tensore degli sforzi. La convenzione di Einstein sugli indici ripetuti è assunta. L'equazione (1.2.7) permette di dare una rappresentazione analitica del campo degli spostamenti subiti dal mezzo a causa delle forze applicate e della variazione del tensore degli sforzi.



Questo lavoro si propone di dare soluzione all' equazione fondamentale dell' elastodinamica (1.2.7) secondo un approccio dinamico che verrà ora illustrato.

Consideriamo una frattura che si propaga sul piano  $x_3 = 0$  di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale  $Ox_1x_2x_3$  ed in particolare siano  $S(t)$  la porzione di tale piano nella quale lo spostamento è diverso da zero ed  $S^*(t)$  il suo complemento in  $x_3 = 0$ .  $S(t)$  è una quantità che evolve nel tempo ed in generale è determinata come parte della soluzione. La geometria del problema è riportata in fig. 1.3.



**Fig. 1.3.** Geometria del problema di una frattura di taglio piana. La linea continua indica il fronte di uno shear crack di forma generica che si estende sul piano  $x_1x_2$ .  $S(t)$  è la regione già fratturata, mentre  $S^*(t)$  quella ancora integra, ovvero il complemento di  $S(t)$  in  $x_3 = 0$  ( tratta da Kostov & Das, 1988 ).

Sotto opportune ipotesi<sup>o</sup>, dal teorema di Betti in forma integrata si giunge ad un' espressione che lega le componenti dello spostamento sulla superficie di frattura in un generico punto di osservazione, identificato dalle coordinate  $(\mathbf{x}, t)$ , alla discontinuità dello spostamento stesso in un punto sorgente  $(\mathbf{x}, \tau)$ .

<sup>o</sup> Si ricorda che il teorema di Betti in forma integrata discende dal teorema di reciprocità con le ipotesi  $u = v = u' = v' = 0$  ovunque nel volume  $V$  considerato per  $t < t_0$ . Scegliendo la forza di volume competente alla seconda soluzione  $(\mathbf{v})$  di (1.2.7)  $\mathbf{g}(\mathbf{x}, t) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x})$ .

Essa ha la forma:

$$\begin{aligned}
 u_n(\mathbf{x}, t) &= \int_{S(t)} C_{ijpq}(\mathbf{x}) \mathbf{D}u_i(\mathbf{x}, t) * G_{np,q}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}, 0) n_j(\mathbf{x}) dS_x \stackrel{\text{df}}{=} \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{S(t)} C_{ijpq}(\mathbf{x}) \mathbf{D}u_i(\mathbf{x}, t) G_{np,q}(\mathbf{x}, t-t; \mathbf{x}, 0) n_j(\mathbf{x}) dS_x ; \quad (1.2.8)
 \end{aligned}$$

$$n = 1, 2, 3$$

In tale relazione, nota in letteratura come teorema di rappresentazione per una superficie interna,  $C_{ijpq}(\mathbf{x})$  è il tensore delle costanti elastiche in cui si è messa in evidenza la eventuale variazione nello spazio,  $\mathbf{D}\mathbf{u}$  la discontinuità dello spostamento attraverso  $S$ ,  $G_{np}$  è il tensore di Green, il quale rappresenta lo spostamento in direzione  $n$  causato da una forza unitaria puntiforme ed impulsiva applicata in  $(\mathbf{x}, t)$  ed  $\mathbf{n}$  il versore normale ad  $S(t)$ . Si noti che le derivate di  $G_{np}$  sono eseguite rispetto alle variabili  $\{\mathbf{x}_q\}_{q=1,2,3}$ .

Nel caso particolare di un mezzo elastico che sia inoltre omogeneo ed isotropo ( $C_{ijpq} = l \mathbf{d}_{ij} \mathbf{d}_{pq} + m(\mathbf{d}_{ip} \mathbf{d}_{jq} + \mathbf{d}_{iq} \mathbf{d}_{jp})$ , con  $l$  e  $m$  costanti di Lamé) e che sia soggetto ad una frattura di taglio (shear crack) (1.2.8), esplicitando la convoluzione, diviene:

$$\begin{aligned}
 u_n(\mathbf{x}, t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{S(t)} K_{a3n}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}, t) a_a(\mathbf{x}, t) dS_x ; \\
 n &= 1, 2, 3; a = 1, 2
 \end{aligned} \quad (1.2.9)$$

ove gli integrandi sono rispettivamente:

---

$\delta(t) \cdot \mathbf{x}_n$  versore si ha il teorema di rappresentazione nel caso generale.

Considerato poi un corpo elastico doppiamente connesso, con superficie esterna  $S^{(est)}(t)$  e superficie interna  $S^{(int)}(t)$  sulla quale avviene la dislocazione ed ipotizzando: (i) forze di volume  $f_i$  ovunque nulle; (ii) condizioni al contorno su  $S^{(est)}(t)$  nulle ( $T_i = u_i = 0$  su  $S^{(est)}(t)$ ); (iii) continuità delle trazioni  $T_i$  attraverso  $S^{(int)}(t)$  (cioè  $\mathbf{s}_{ij}^+ n_j^+ = \mathbf{s}_{ij}^- n_j^-$ ); (iv) continuità di  $C_{ijpq}(\mathbf{x})$ ,  $G_{np}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}, t)$ ,  $(\partial/\partial \mathbf{x}_q) G_{np}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}, t)$  attraverso  $S^{(int)}(t)$  si ha (1.2.8).

$$\begin{aligned}
 K_{a3n}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}, t) &= \mathbf{m} \left[ \frac{\partial}{\partial x_3} G_{an}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}, t) + \frac{\partial}{\partial x_a} G_{3n}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}, t) \right] = \\
 &= -\mathbf{m} \left[ \frac{\partial}{\partial x_3} G_{an}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}, t) + \frac{\partial}{\partial x_a} G_{3n}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}, t) \right]
 \end{aligned} \tag{1.2.10}$$

$$\begin{aligned}
 a_a(\mathbf{x}, t) &\equiv u_a^+(\mathbf{x}, t) - u_a^-(\mathbf{x}, t) \equiv \\
 &\equiv \lim_{z \rightarrow 0^+} u_a(\mathbf{x}, t) - \lim_{z \rightarrow 0^-} u_a(\mathbf{x}, t)
 \end{aligned}$$

con  $z$  intendendo la coordinata normale alla superficie ( nel nostro caso piana ) di frattura ( cfr. Kostrov & Das, 1988, equazioni (5.1.2) con correzione e (3.2.5) ).

Il mio scopo è tuttavia quello di esprimere un legame tra la discontinuità dello spostamento, che è stata indifferentemente indicata con  $\mathbf{Du}$  ed  $\mathbf{a}$ , e la perturbazione al tensore degli sforzi  $s^p_{ij}$  o viceversa; per questo, differenziando (1.2.9) rispetto ad  $\mathbf{x}$ , tenendo conto che vale:

$$G_{ij}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}, t) = G_{ij}(\mathbf{x} - \mathbf{x}, t - t)$$

e prendendo il limite  $x_3 \rightarrow 0$ , si ottiene:

$$\begin{aligned}
 s_{a3}^p(\mathbf{x}, t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{S(t)} T_{ab}(\mathbf{x} - \mathbf{x}, t - t) a_b(\mathbf{x}, t) dS_x ; \\
 \mathbf{a}, \mathbf{b} &= 1, 2
 \end{aligned} \tag{1.2.11}$$

ove  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{x}$  sono ora vettori a due componenti ( sul piano di faglia  $x_3 = 0$  ) ed il tensore  $T_{ab}$ , omettendo per semplicità di notazione la dipendenza funzionale da  $\mathbf{x}, t, \mathbf{x}$  e  $t$ , risulta:

$$T_{ab} = -\mathbf{m} \left[ \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} G_{ba} + \frac{\partial^2}{\partial x_3 \partial x_b} G_{3a} + \frac{\partial^2}{\partial x_a \partial x_b} G_{33} + \frac{\partial^2}{\partial x_a \partial x_3} G_{b3} \right] \tag{1.2.12}$$

A causa delle singularità del nucleo di deformazione  $G_{ij}$  ( cfr., ad esempio, Aki &

Richards, 1980, vol. I, equazione (4.23); Appendice A ), anche il tensore  $T_{ab}$  è singolare e per questo è necessario considerare il valore principale di Cauchy nell' integrale (1.2.11). Questo è noto come *problema di Nabarro* ed è stato formulato essenzialmente da Budiansky & Rice ( 1979 ).

E' inoltre possibile dare una rappresentazione alternativa al problema, sfruttandone le simmetrie discusse da Das ( 1976 ) e da Das & Aki ( 1977a ). In tali lavori è mostrato che sia per fratture in - plane che anti - plane la soluzione è antisimmetrica rispetto al piano di frattura ed è pertanto sufficiente risolvere il problema in uno dei due semispazi in cui  $\mathbb{R}^3$  è diviso da  $x_3 = 0$ . Così facendo non viene più introdotta l' ipotesi di continuità delle trazioni come è stato fatto per ottenere (1.2.8) poiché si è impostato un problema con superficie libera, sulla quale cioè, per definizione, gli sforzi  $s_{31}$ ,  $s_{32}$  e  $s_{33}$  sono nulli. Tralasciando per brevità il resto della trattazione analitica, per la quale si rimanda a Kostrov & Das ( 1988 ), si ha:

$$u_n(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{S(t)} G_{na}(\mathbf{x} - \mathbf{x}, t - t) s_{a3}^p(\mathbf{x}, t) dS_x ; \quad (1.2.13)$$

$$n = 1, 2, 3; a = 1, 2$$

Considerando ora il limite  $x_3 \rightarrow 0^+$  si ottiene che la discontinuità dello spostamento tra le due facce del piano di faglia è il doppio di  $u_n$ :

$$a_a(\mathbf{x}, t) = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{S(t)} G_{ab}(\mathbf{x} - \mathbf{x}, t - t) s_{b3}^p(\mathbf{x}, t) dS_x ; \quad (1.2.14)$$

$$a, b = 1, 2$$

ove ancora  $\mathbf{x} \equiv (x, y)$ ,  $\mathbf{x} \equiv (x_1, x_2)$ . Nelle due precedenti relazioni  $G_{ij}$  rappresenta la soluzione per una forza unitaria, puntiforme ed impulsiva per un semispazio ( $x_3 \geq 0$ ) con superficie libera ( *problema di Lamb*, risolto da Richards, 1979 ). Ancora  $G_{ij}$  risulta singolare ( Richards, 1979; Kostrov & Das, 1988; Appendice A ) ed è pertanto necessario prendere il valore principale nell' integrazione, come in (1.2.11).

A (1.2.13) verrà dato ampio risalto nel seguito di questa tesi.

Dal confronto di (1.2.9) e (1.2.13) si evidenziano alcune importanti differenze tra le due descrizioni della sorgente sismica e del processo di dislocazione che ne consegue: la prima effettuata seguendo un *approccio cinematico*, la seconda compiuta mediante un *approccio dinamico*.

Da un punto di vista meramente analitico in (1.2.9) compaiono le derivate spaziali del tensore di Green  $G_{np}$  relativo ad una forza di volume in tutto lo spazio, mentre in (1.2.13) appare il tensore di Green non derivato e relativo ad un semispazio con superficie libera — come già osservato in precedenza — ; inoltre nell' approccio cinematico compare la discontinuità dello spostamento  $Du_i$  nell' integrazione, mentre in quello dinamico appare la perturbazione allo sforzo  $s^p_{ij}$  dovuto alla propagazione del crack.

Da un punto di vista fisico è proprio quest' ultima la distinzione caratterizzante: si studia una variazione della discontinuità dello spostamento da una parte e la variazione dinamica di sforzo dall' altra.

Occorre infine osservare che entrambe le relazioni (1.2.11) e (1.2.14) possono essere scritte, senza perdere di generalità, restringendo il dominio dell' integrazione temporale ad un intervallo limitato, a causa della presenza in (1.2.11) di funzioni  $\theta$  di Heaviside aventi per argomento il tempo ( cfr., ad esempio, Aki & Richards, 1980, vol. I, equazione (4.23) ) e per le caratteristiche stesse di  $G_{ab}$  in (1.2.14) ( cfr. Richards, 1979; Kostrov & Das, 1988; Appendice A ).

### **1.2.3. La legge dello slip - weakening**

Al fine di rimuovere la singolarità del tensore degli sforzi in corrispondenza del fronte di rottura, come verrà più diffusamente discusso nel paragrafo 2.3, Andrews ( 1976a, 1976b, 1985, 1994 ) ha proposto una legge costitutiva da accoppiare all' equazione (1.2.13), lo *slip - weakening*. In tale modello ad ogni

punto del piano di faglia è assegnato un valore della trazione massima  $T$ , funzione dello slip  $Du$  che si ha in quel punto. Quando non si è ancora verificato nessuno scorrimento lo sforzo di taglio  $t$  è limitato, mentre durante lo scorrimento esso è proporzionale alla trazione:

$$\begin{aligned} |t| &\leq T(Du) && , \text{ se } \frac{\partial}{\partial t} Du = 0 \\ t &= \text{sign}\left(\frac{\partial}{\partial t} Du\right) T(Du) && , \text{ se } \frac{\partial}{\partial t} Du \neq 0 \end{aligned} \quad (1.2.15)$$

Si assume che l' andamento della trazione massima sia del tipo:

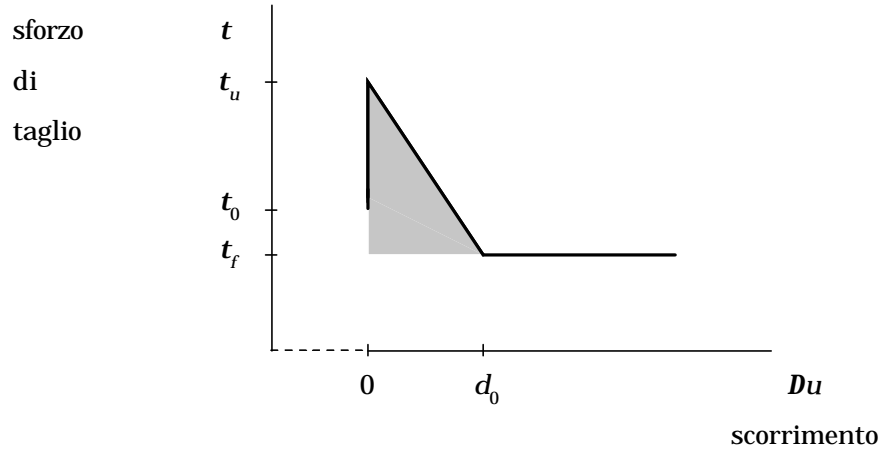
$$T = \begin{cases} t_u - (t_u - t_f) \frac{Du}{d_0} & , Du < d_0 \\ t_f & , Du \geq d_0 \end{cases} \quad (1.2.16)$$

ove  $t_u$  rappresenta il più alto valore della trazione che il materiale in esame è in grado di sopportare;  $t_f$  è il valore dell' attrito cinetico sul piano di faglia e  $d_0$  è una lunghezza caratteristica in corrispondenza della quale la caduta di sforzo è terminata e la trazione si mantiene costante ed uguale al valore finale  $t_f$ . Inizialmente la trazione è  $t_0$  ed è inferiore a  $t_f$ , così come previsto dal criterio di Hamano (§ 1.2.1).

L' elemento caratterizzante di questo modello è che la caduta di sforzo non avviene istantaneamente, ma si compie su una lunghezza caratteristica ( $d_0$ ).

Appare immediato osservare che lo slip – weakening è una estensione del concetto di forza di coesione introdotta da Barenblatt ( 1959a, 1959b ) e ripresa da Ida ( 1972 ). Secondo Barenblatt l' equilibrio delle fratture statiche è in stretta correlazione con le caratteristiche della forza coesiva, la quale è, come la trazione massima  $T$  di Andrews, funzione della discontinuità dello spostamento  $Du$  sulla superficie del crack. Ida, poi, modellò numericamente il processo dinamico di fratturazione considerando diverse dipendenze funzionali della forza di coesione da  $Du$  ed il suo secondo modello ( model 2 ) sostanzialmente è alla base dello slip – weakening.

Una rappresentazione del criterio ora esposto è proposta in fig. 1.4.



**Fig. 1.4.** Modello slip - weakening. La curva tracciata rappresenta l' andamento della trazione massima che agisce sul piano di faglia in funzione della dislocazione;  $d_0$  è il valore critico oltre il quale la trazione rimane costante ( tratta da Andrews, 1976a ).

Andrews ha anche mostrato l' esistenza di una *lunghezza di soglia*  $L_c$  al di sotto della quale sia fratture di taglio in - plane, o mode II ( 1976b ), che anti - plane, o mode III ( 1976a ), non possono nucleare. I valori di tale lunghezza sono dati, rispettivamente, dalle relazioni:

$$L_c^{(II)} = 8 \frac{m}{p} \frac{1+m}{1+2m} \frac{G}{(t_0 - t_f)^2} \quad (1.2.17a)$$

$$L_c^{(III)} = 4 \frac{m}{p} \frac{G}{(t_0 - t_f)^2} \quad (1.2.17b)$$

ove  $G$  denota l' energia spesa durante il processo di rottura, espressa come:

$$G = \frac{1}{4} (t_u - t_f) d_0 \quad (1.2.18)$$

pari alla metà dell' area della regione evidenziata in fig. 1.4, energia che in tale modello è assunta essere costante ed indipendente dalla soluzione del problema dinamico.

La relazione (1.2.18) consente di esprimere un legame tra  $d_0$  ed  $L_c$ .

Per giungere a (1.2.17a) e (1.2.17b) Andrews procede in maniera del tutto analoga; consideriamo allora, per brevità, solamente la situazione di fratture anti - plane. L' energia disponibile che può bilanciare l' energia di superficie per estendere il crack è esprimibile come:

$$F = U_e - W$$

ove  $U_e$  rappresenta l' energia di deformazione e  $W$  il lavoro compiuto contro l' attrito ( cfr. § 2.2 per maggiori dettagli ). Tenendo conto che lo spostamento lungo la frattura che si estende da  $z = -L$  a  $z = L$  è ( Knopoff, 1958 )

$$u = \frac{t_0 - t_f}{m} \sqrt{L^2 - z^2}$$

e che la discontinuità  $Du$  dello spostamento vale  $2u$ , si hanno:

$$U_e = \frac{t_0 + t_f}{2} \int_{-L}^L Du dz = \frac{P}{2m} (t_0 + t_f) (t_0 - t_f) L^2$$

$$W = t_f \int_{-L}^L Du dz = \frac{P}{m} t_f (t_0 - t_f) L^2$$

Quando la semilunghezza  $L$  del crack viene incrementata di una quantità infinitesima  $dL$  la variazione dell' energia disponibile risulta:

$$dF = dU_e - dW = \frac{P}{m} (t_0 - t_f)^2 L dL \quad (1.2.19)$$

In corrispondenza della semilunghezza critica  $L_c$  tale incremento energetico bilancia l' energia necessaria per allungare la frattura, pari a

$$dU_s = 4 G dL \quad (1.2.20)$$

Confrontando (1.2.19) con (1.2.20) si ha (1.2.17b).

Ohnaka & Yamashita ( 1989 ) ed Ohnaka ( 1990 ) hanno studiato una legge



di slip – weakening, da loro chiamato “ dinamico ” per distinguerlo da quello “ quasi – statico ” introdotto da Andrews, caratterizzato da una trazione massima  $T$  di classe  $C^2$  invece che  $C^1$ . Il modello di Ohnaka prevede una iniziale crescita di  $T$  con dipendenza logaritmica da  $Du$ ; una volta che  $T$  ha raggiunto il valore massimo la trazione si attenua, fino ad arrivare a  $t_f$ . Il primo andamento rappresenta un effetto di slip – strengthening, mentre il secondo un effetto propriamente di tipo slip – weakening:

$$t = (t_0 - t_f) [1 + a \ln(1 + b Du)] e^{-q Du} + t_f$$

Qui  $a$ ,  $b$  e  $q$  sono costanti indipendenti dallo scorrimento e  $t_u$  è esprimibile come  $t(Du_{max})$ , ove  $Du_{max}$  è la soluzione dell' equazione trascendente:

$$1 + \frac{a b}{1 + b Du_{max}} - q - a q \ln(1 + b Du_{max}) = 0$$

Il modello slip – weakening è comunque un' idealizzazione in quanto non rappresenta compiutamente un terremoto: infatti in realtà l' energia di frattura non è una costante del materiale ed inoltre se essa fosse costante un crack non potrebbe nucleare in un dato punto, ma partirebbe da una rottura preesistente, come osservato da Andrews ( 1985 ).

#### **1.2.4. Barriere ed asperità**

La complessità delle forme d' onda registrate in seguito al verificarsi di terremoti di grande entità suggerisce che il moto cosismico sulla faglia sia irregolare e che ciò sia causato dalla presenza sulla superficie di faglia stessa di irregolarità per quanto concerne le proprietà fisiche ovvero meccaniche.

Le eterogeneità di una faglia sono state illustrate in letteratura secondo modelli che, come si vedrà, possono considerarsi in qualche modo

complementari.

L' introduzione del concetto di *barriera* è dovuta ad Aki ( 1979 ) e a Das & Aki ( 1977a, 1977b ), i quali hanno studiato le irregolarità della propagazione di una rottura. Tali irregolarità sono spiegate, nel modello proposto, tramite l' assunzione che sulla faglia vi siano regioni ad alta resistenza alla frattura, ossia aree nelle quali si ha un elevato valore dello strength  $S$  ( § 1.2.1 ).

Una barriera può essere caratterizzata mediante la misura della sua estensione e del suo strength: se la sua area è elevata, Husseini et al. ( 1975 ) hanno mostrato che la propagazione del crack può essere arrestata, se invece essa è piccola rispetto alle dimensioni del fronte di rottura nell' istante in cui incontra la barriera, l' interazione risulta in generale più complessa e possono verificarsi diversi fenomeni a seconda del valore dello sforzo tettonico: (1) se è relativamente alto la barriera è rotta ed il crack tip passa; (2) se è sufficientemente basso il fronte procede attraverso la barriera lasciandola immutata; (3) se è intermedio la barriera non viene rotta al passaggio iniziale della rottura ma può rompersi in seguito, a causa della crescita dello stress dinamico.

Facendo riferimento alla definizione di  $S$  nel modello di Das & Aki ( 1977a, 1977b ) viene introdotto il *fattore di intensità dello sforzo*, o *stress intensity factor*,  $k_c$  definito mediante la relazione:

$$\frac{c k_c}{(t_0 - t_f) \sqrt{d}} = 1 + S = \frac{t_u - t_f}{t_0 - t_f} \quad (1.2.21)$$

nella quale  $d$  rappresenta la lunghezza della griglia lungo il piano di faglia e  $c$  è una costante circa uguale a 2 ad eccezione del caso in cui risulti  $S \cong 0$ . In questo modo le barriere sono descritte da alti valori della quantità  $1 + S$  in alcuni punti del grigliato, mentre è  $S = 0$  nella parte rimanente della griglia. Occorre considerare che l' affermazione “ elevato valore di  $S$  ” contiene un' intrinseca ed ineliminabile ambiguità: un elevato valore dello strength, infatti, si può avere tanto per un alto  $t_u$  quanto per un basso  $t_0$ . Il primo caso può considerarsi come una proprietà permanente della faglia, contrariamente al secondo.

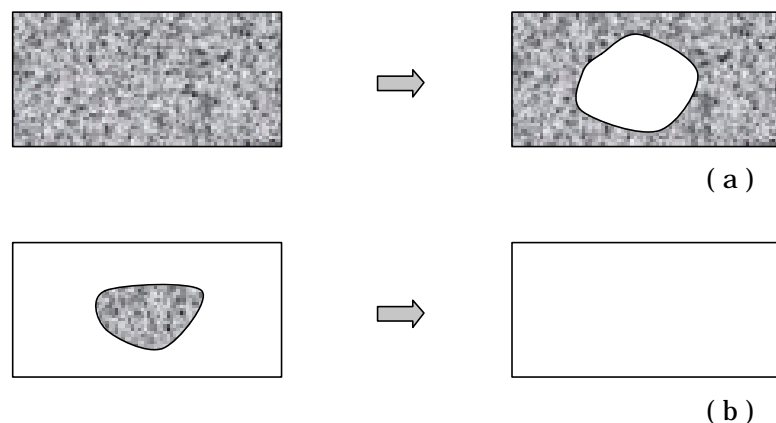
La presenza di una barriera, come si è visto, può assumere un ruolo

estremamente importante nella propagazione di una rottura e questo si riflette nelle caratteristiche di un importante osservabile fisico, la radiazione sismica: essa diviene maggiormente isotropica nel caso in cui una barriera venga rotta e viene arricchita da modulazioni di alta frequenza in tutte le direzioni. Infine, l' introduzione del modello a barriere consente ( Das & Aki, 1977b ) di prevedere il verificarsi di aftershocks studiando la forma d' onda dello shock principale: le barriere rotte sono aree ad elevata concentrazione di sforzo e possibili sorgenti di repliche.

Un' estensione del modello a barriere per faglie 2 – D come quello discusso in precedenza è stata proposta da Mikumo & Miyatake ( 1978 ), i quali hanno studiato il processo di propagazione dinamica di una rottura di un modello tridimensionale.

Invece di considerare l' eterogeneità della resistenza, Kamamori ( 1981 ) e Lay & Kamamori ( 1981 ) hanno definito *asperità* una regione della superficie di faglia nella quale lo sforzo è maggiore rispetto allo sforzo medio sull' intera faglia.

In fig. 1.5 è messa in evidenza la distinzione di questi due modelli osservando la situazione in una porzione rettangolare piana della faglia.



**Fig. 1.5.** Barriere ed asperità. Configurazioni schematiche prima e dopo il verificarsi di un terremoto: nel primo caso sulla faglia aumenta l' eterogeneità, nel secondo aumenta l' omogeneità ( tratta da Boschi & Dragoni, 1988 ).

Nel primo caso ( fig. 1.5a ) dopo il terremoto si ha una situazione di disomogeneità nello sforzo: la rottura si è propagata irregolarmente — area bianca — a causa della presenza nella parte circostante del rettangolo di zone ad alto strength ( barriere ) che sono in grado di arrestarla. Nella seconda situazione ( fig. 1.5b ), al contrario, prima della rottura si ha un' eterogeneità nella concentrazione di sforzo — area scura — che viene rilasciato, arrivando così ad una configurazione di maggiore omogeneità.

Da questo punto di vista i due modelli, i quali rappresentano comunque situazioni limite in quanto in generale su di una faglia saranno presenti distribuzioni spaziali eterogenee tanto della resistenza ( barriere ) quanto dello sforzo ( asperità ), appaiono complementari.

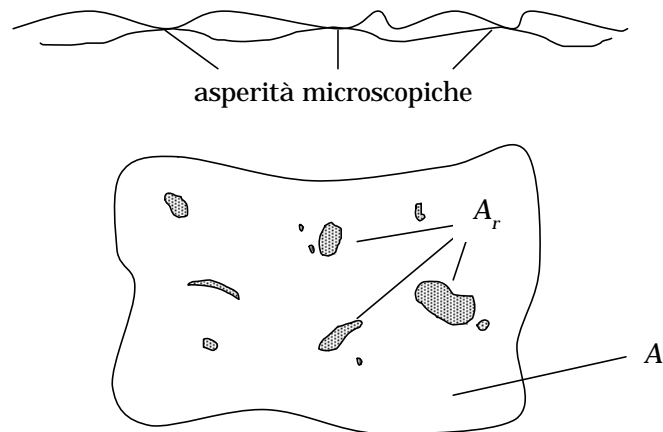
### **1.3. Le leggi di attrito**

#### **1.3.1. Le leggi di attrito dipendenti dalla velocità e dallo stato**

Per *attrito* si intende la resistenza opposta al moto che si manifesta quando un corpo è soggetto ad uno scorrimento tangenziale e la sua superficie è a contatto con un altro corpo. Lo studio di tale fenomeno, nato nel tentativo di ridurre, quanto più fosse possibile, l' attrito presente in moltissimi dispositivi meccanici, acquisì con Leonardo da Vinci un aspetto di maggiore sistematica e non fu più legato a fini puramente ingegneristici. Amontons, poi, alla fine del XVIII secolo, formulò le due leggi basilari della teoria della frizione: (1) la forza d' attrito è indipendente dalla dimensione della superficie di contatto; (2) essa è proporzionale al carico normale.

Il concetto moderno di attrito è tuttavia dovuto a Bowden & Tabor ( 1950, 1964 ) i quali hanno eseguito un ampio numero di esperimenti con differenti materiali, anche se il punto centrale dei loro lavori è costituito dalla teoria dell' adesione dei metalli.

L' ipotesi fondamentale introdotta è che le superfici reali in mutuo contatto abbiano una topografia, come illustrato in fig. 1.6, in modo tale che i corpi aderiscano solamente in una serie di aree, da loro definite *asperità microscopiche*, da non confondersi con le asperità introdotte nel paragrafo 1.2.4.



**Fig. 1.6.** Sistema costituito da due superfici in contatto. Le sezioni trasversale e longitudinale indicano le zone di effettivo contatto tra le due superfici, definite da Bowden & Tabor ( 1950, 1964 ) asperità ( microscopiche ). L' unione di tali aree di contatto è la superficie reale di adesione, in generale molto minore dell' area complessiva di ciascuna superficie ( tratta da Scholz, 1990 ).

La somma di tutte queste micro - regioni costituisce l'area effettiva di contatto,  $A_r$  , più piccola dell' area geometrica totale  $A$  . Solamente  $A_r$  , e non  $A$  , è responsabile dei fenomeni di attrito. Il carico tettonico remoto che sollecita la superficie di faglia possiede una componente normale alla superficie di faglia stessa

$$N = p A_r \quad (1.3.1)$$

ed una componente di taglio

$$F = s A_r \quad (1.3.2)$$

In tali relazioni  $p$  è il *grado di penetrazione delle zone di contatto*, o *penetration hardness*, che dà una misura della rugosità delle due superfici che aderiscono ed  $s$  è la *resistenza di taglio* tipica del materiale in esame. Combinando le due precedenti equazioni Bowden & Tabor descrivono l' attrito tramite un unico parametro, il *coefficiente di attrito*  $m$ , definito come:

$$m = \frac{F}{N} = \frac{s}{p} \quad (1.3.3)$$

Al primo ordine  $m$  appare essere indipendente dal materiale, dalla temperatura e dalla velocità di scorrimento, poiché  $p$  ed  $s$ , sebbene siano entrambi fortemente dipendenti da tali parametri, differiscono tra loro solamente per una costante geometrica, dovuta alla diversa orientazione del carico agente.

E' stato mostrato però che tale assunzione non è corretta per una vasta classe di materiali: considerando una faglia nella crosta terrestre, le variazioni litologiche e geometriche possono indurre variazioni spaziali nell' attrito. E' comunemente assunto che l' attrito  $t$  sia localmente proporzionale allo sforzo normale effettivo agente sulla faglia:

$$t = m( s_n - p_{poro} ) \quad (1.3.4)$$

ove  $p_{poro}$  è la pressione di poro, il cui effetto è importante poiché la parte fragile della terra è permeata di fluido.

Durante episodi di dislocazione causati dal verificarsi di un evento sismico i punti di contatto tra le due superfici che aderiscono vengono continuamente creati e distrutti ed in questo modo il coefficiente di frizione  $m$  varia nel tempo:

$$m = m(t)$$

Questo equivale a formulare un modello di meccanica delle faglie nel quale è consentito un riguadagno della resistenza ( strength ) nel tempo, infatti risulta:

$$t(t) = m(t) s_n \quad (1.3.5)$$

ove con  $s_n$  si intende lo sforzo normale effettivo, come in (1.3.4).

La formulazione delle leggi di attrito è dovuta originariamente a Dieterich ( 1979a, 1981 ) al fine di riprodurre gli andamenti ottenuti in esperimenti di laboratorio.

Per non appesantire l' esposizione, i dettagli analitici verranno considerati in Appendice B, mentre ora sono introdotti gli elementi fondamentali. In tutta generalità tali leggi assumono la forma:

$$t(t) = F( s_n, v(t), stat(t) ) \quad (1.3.6)$$

che mostra la dipendenza dell' attrito, tramite la funzione  $F$ , dalla velocità di dislocazione  $v$  e dalla variabile di stato. Per questo (1.3.6) viene denominata *legge di attrito dipendente dalla velocità e dallo stato*. Nella variabile di stato, che in generale può essere espressa tramite un vettore di variabili  $Y \equiv (Y_1, \dots, Y_N)$ , è contenuta la distribuzione di temperatura, la pressione di poro, il comportamento chimico. Inoltre, poiché lo stato dipende esplicitamente dal tempo si ha in  $t$  un effetto di “ memoria ” del precedente scorrimento.

L' implicita esclusione che si è fatta in (1.3.6) è che lo stato di un punto possa interagire con altri punti della superficie di frattura ( proprio perché la variabile  $Y$  non dipende esplicitamente dalle coordinate spaziali ), cioè sono esclusi fenomeni di diffusione dello stato nella faglia. In questo senso ( Ruina, 1980 ) la legge costitutiva introdotta sul piano di faglia in termini di attrito — per maggiori chiarimenti si veda il paragrafo 2.2 — risulta una proprietà puntuale.

Come sarà meglio evidenziato in seguito, e ricavato analiticamente in Appendice B, la variabile di stato è diversa nel modello di Dieterich ed in quello di Ruina. Poiché tuttavia in entrambi i casi l' unica dipendenza esplicita dello stato è quella del tempo, Kosloff & Liu ( 1980 ) e Ruina ( 1980, 1983 ) hanno discusso la necessità di associare a (1.3.6) una equazione evolutiva per la variabile di stato.

Essa ha la forma:

$$\frac{d}{dt} \text{stato}(t) = G(\mathbf{s}_n, v(t), \text{stato}(t), L) \quad (1.3.7)$$

in cui  $L$  è una lunghezza caratteristica con cui il sistema risponde a variazioni di velocità.

Un' importante semplificazione può essere fatta assumendo che le funzioni  $F$  e  $G$  risultino entrambe indipendenti da  $\mathbf{s}_n$  ed inoltre che lo stato possa essere descritto da una sola variabile  $Y$ . In questo modo è possibile riscrivere (1.3.6) e (1.3.7) come:

$$\left\{ \begin{array}{l} t(t) = \mathbf{s}_n F(v(t), Y(t)) \\ \frac{d}{dt} Y(t) = \mathbf{s}_n G(v(t), Y(t), L) \end{array} \right. \quad (1.3.8a)$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{d}{dt} Y(t) = \mathbf{s}_n G(v(t), Y(t), L) \end{array} \right\} \quad (1.3.8b)$$

L' equazione evolutiva (1.3.8b) assume una forma diversa nel modello di Dieterich ed in quello di Ruina, come vedremo, poiché la variabile di stato ha espressioni differenti nei due modelli e mentre nel primo caso ha le dimensioni di un tempo e rappresenta l' età media di contatto dei materiali che scorrono, nel secondo caso ha le dimensioni di uno sforzo e non ha alcuna identificazione con quantità fisiche.

### 1.3.2. Evidenze sperimentali

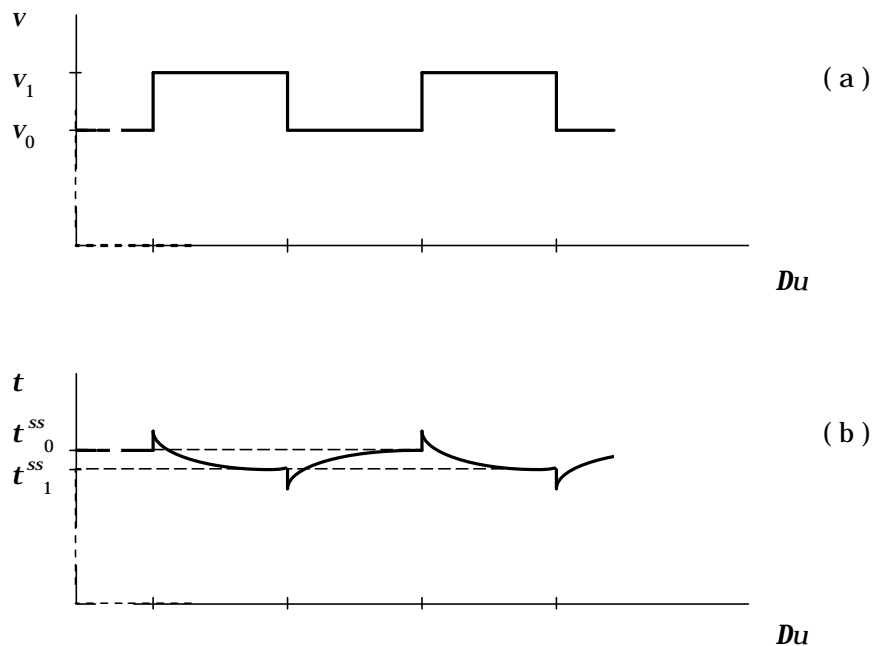
Malgrado la variabile di stato  $Y$  non possa essere misurata direttamente, esistono numerosi esperimenti di laboratorio che confermano andamenti come quelli stabiliti dalle equazioni (1.3.8). In essi sono stati presi in esame diversi campioni di rocce, come ad esempio granito, quarzite e arenaria, sottoposti a diverse velocità di scorrimento e differenti condizioni ambientali ( temperatura, pressione, sforzo normale, rugosità delle superfici di contatto ) ed utilizzati in vari apparati meccanici, anche in presenza di impurità tra le superfici di



scorrimento ( gauge ).

La maniera più semplice per verificare la dipendenza dell' attrito  $t$  dalla velocità di scorrimento  $v$  è quella di utilizzare un dispositivo sperimentale costituito da due blocchi di materiale, posti a contatto da un carico normale esterno  $s_n$ , che scorrono con attrito l' uno rispetto all' altro. In fig. 1.7a è riportata la brusca variazione a gradini della velocità ed in fig. 1.7b la risposta del sistema, descritta in termini di  $t$ .

Questo esperimento di cambiamento improvviso di velocità è stato ampiamente utilizzato: Dieterich & Kilgore ( 1994 ) hanno studiato gli effetti sul coefficiente di attrito  $m$ , mentre Gu et al. ( 1984 ) hanno osservato il comportamento di un sistema ad un solo grado di libertà, lo *spring slider*, per chiarire il ruolo fisico delle costanti che compaiono nelle equazioni di Dieterich e Ruina ( cfr. §§ 1.3.3 e 1.3.4 ).



**Fig. 1.7.** Effetti di una variazione improvvisa della velocità di carico. ( a ) Andamento della velocità di scorrimento imposta dall' esterno, in funzione dello scorrimento, alla quale il sistema ( vedi testo ) è soggetto. ( b ) Comportamento dell' attrito, anch' esso in funzione dello scorrimento, determinato dalle brusche variazioni di velocità tra i due livelli  $v_0$  e  $v_1$  ( tratta da Ruina, 1983 ).

E' possibile riassumere alcune caratteristiche dell' andamento di  $t$  in fig. 1.7b:

- 1) *effetto diretto*: una variazione di  $v$  provoca un cambiamento istantaneo di  $t$  nello stesso senso;
- 2) *effetto a lungo termine*: dopo che si è verificato il fenomeno precedente si ha una lenta variazione di  $t$  in senso opposto;
- 3) *distanza critica*: il decadimento dell' attrito si compie su una lunghezza caratteristica  $L$ , lo stesso parametro che compare in (1.3.8b);
- 4) *effetto stazionario*: dopo l' instabilità l' attrito raggiunge un livello costante, rappresentato dai tratti quasi orizzontali della curva di fig. 1.7b.

### 1.3.3. Il modello di Dieterich

Dieterich ha proposto una espressione per il coefficiente di attrito  $m$  tramite il prodotto

$$m = C R \quad (1.3.9)$$

ove  $C$  è una costante del materiale ed è inversamente proporzionale al grado di penetrazione delle zone di contatto  $p$  di (1.3.1) ed  $R$  è la resistenza delle asperità microscopiche allo sforzo di taglio  $t$  per unità di area. Così  $m$  è adimensionale, essendo infatti  $C^{-1}$  ed  $R$  proporzionali allo sforzo. Dieterich ( 1981 ) introdusse una variabile di stato  $F$  che nel caso stazionario ( § 1.3.5 ) dipende dalla lunghezza caratteristica e dalla velocità di scorrimento:

$$F^{ss} = \frac{L}{v} \quad (1.3.10)$$

ed è pertanto definita come età media dei punti di contatto. Per la costante  $C$  di (1.3.9), al fine di approssimare l' andamento di  $m$  osservato negli esperimenti di frizione, egli scrisse:

$$C = c_1 + c_2 \log(c_3 F + 1) \quad (1.3.11)$$

in cui i parametri  $\{ c_i \}_{i=1, 2, 3}$  sono costanti e  $F$  è definita come in (1.3.10). Dimensionalmente  $c_3$  deve essere l' inverso di un tempo. Per quanto riguarda il termine  $R$ , invece, si ha:

$$R = \frac{1}{r_1 + r_2 \log\left(\frac{r_3}{v} + 1\right)} \quad (1.3.12)$$

ove ancora  $\{ r_i \}_{i=1, 2, 3}$  sono costanti ed  $r_3$  deve avere le dimensioni di una velocità, essendo  $v$  la velocità di scorrimento. Combinando le due relazioni precedenti si può scrivere (1.3.9) come ( Dieterich, 1981 ):

$$m = \frac{c_1 + c_2 \log(c_3 F + 1)}{r_1 + r_2 \log\left(\frac{r_3}{v} + 1\right)} \quad (1.3.13)$$

Si giunge alla *legge costitutiva di Dieterich* ( Dieterich, 1979a, 1979b, 1981, 1992 ) fissando, del tutto arbitrariamente,  $r_1$  ad 1, tenendo conto che per (1.3.5) è  $t = m s_n$  e trasformando la base del logaritmo:

$$t = \frac{c_1 s_n + c_2 s_n \log(e) \ln(c_3 F + 1)}{1 + r_2 \log(e) \ln\left(\frac{r_3}{v} + 1\right)} \quad (1.3.14)$$

Per semplicità di notazione è utile introdurre le posizioni:

$$t_* \equiv c_1 s_n$$

$$A \equiv t_* r_2 \log(e)$$

$$B \equiv c_2 s_n \log(e)$$

$$v_* \equiv L c_3$$

$$r_3 \equiv v_*$$

I parametri  $A$  e  $B$  sono costanti positive che dipendono esplicitamente dallo

sforzo normale e sono esprimibili come:

$$A = a s_n$$

$$B = b s_n$$

con  $a$  e  $b$  dipendenti dalle proprietà dei materiali e dalla temperatura, come mostrato da esperimenti di laboratorio compiuti su granito ( Dieterich, 1978; Stesky, 1978; Tullis & Weeks, 1986; Blanpied et al., 1991 ). La grandezza  $v_*$  è un valore arbitrario di riferimento per la velocità e  $t_*$  è la trazione richiesta per avere uno scorrimento a velocità  $v_*$ .

In questo modo si ottiene:

$$t = \frac{t_* + B \ln \left( \frac{F v_*}{L} + 1 \right)}{1 + \frac{A}{t_*} \ln \left( \frac{v_*}{v} + 1 \right)} \quad (1.3.15a)$$

la quale descrive la variazione dell' attrito in funzione dei parametri della struttura sismogenetica studiata e per questo è una equazione costitutiva ( *governing equation* ).

La legge evolutiva ad essa associata, come mostrato in Appendice B, risulta:

$$\frac{d}{dt} F = 1 - \frac{F v}{L} \quad (1.3.15b)$$

La legge di Dieterich ridotta. Come esposto in Appendice B, nell' ipotesi che risulti  $( A / t_* ) \ln ( v_* / v + 1 ) \ll 1$ , è possibile fornire di (1.3.15a) una formulazione semplificata, che risulta:

$$t = t_* - A \ln \left( \frac{v_*}{v} + 1 \right) + B \ln \left( \frac{F v_*}{L} + 1 \right) \quad (1.3.16a)$$

Tale relazione, denominata appunto *legge di Dieterich ridotta*, è associata all' equazione evolutiva proposta originariamente da Dieterich (1.3.15b), che qui viene riscritta per completezza:

$$\frac{d}{dt} F = 1 - \frac{F v}{L} \quad (1.3.16b)$$

Le (1.3.16) sono state diffusamente utilizzate in letteratura ( Okubo & Dieterich, 1986; Okubo, 1989; Dieterich, 1981; Perrin et al., 1994 ).

#### 1.3.4. Il modello di Ruina

Oltre alla semplificazione fatta con (1.3.16a), sempre in Appendice B è illustrato come, nel caso siano  $F v_* / L \gg 1$  e  $v_* / v \gg 1$ , è possibile giungere ad una forma estremamente semplice di (1.3.15a), nota come *legge di Ruina* ( Ruina, 1980, 1983 ). In essa compare una nuova variabile di stato  $q$  in luogo della  $F$  di Dieterich.

Tale legge risulta:

$$t = t_* + q + A \ln \left( \frac{v}{v_*} \right) \quad (1.3.17a)$$

$q$  ha quindi le dimensioni di uno sforzo.

L' evoluzione nel tempo di  $q$  è descritta dall' equazione differenziale

$$\frac{d}{dt} q = - \frac{v}{L} \left[ q + B \ln \left( \frac{v}{v_*} \right) \right] \quad (1.3.17b)$$

Le tre leggi di attrito (1.3.15a), (1.3.16a) e (1.3.17a) non sono definite in  $v = 0$  poiché non lo sono le funzioni  $1 / v$  ( nei primi due casi ) e  $\ln v$  ( nell' ultimo ). Mentre la Dieterich originaria fornisce  $t = 0^+$  nel limite  $v \rightarrow 0^+$ , la legge di Dieterich in forma ridotta e quella di Ruina esibiscono una singolarità

per  $v \rightarrow 0^+$ . Questa situazione critica può essere tuttavia aggirata considerando che la superficie di scorrimento sia sempre in moto (cioè sia  $v > 0$ ), ma con una velocità inferiore ai valori minimi misurabili.

Il limite per alte velocità ( $v \rightarrow +\infty$ ) produce una singolarità nella sola legge di Ruina, poiché nelle due leggi di Dieterich  $v$  compare al denominatore. Essa viene eliminata, come compiuto da Rice & Tse (1986) e da Weeks (1993), ipotizzando che per velocità superiori ad un certo valore critico l'attrito  $t$  risulti indipendente da  $v$ , cioè sia "congelato" ad un valore stazionario che corrisponde alla velocità critica stessa.

### 1.3.5. Condizione di stabilità

La dipendenza dell'attrito dalla velocità di scorrimento prevista dal modello di Dieterich e da quello di Ruina risulta particolarmente importante per quanto attiene alla stabilità, o alla instabilità, del processo di dislocazione. Gli andamenti sperimentali hanno infatti evidenziato un comportamento *stabile* quando un incremento del carico esterno, interpretato come velocità di scorrimento, produce una crescita nell'attrito, cioè se è soddisfatta la relazione seguente:

$$\frac{\partial}{\partial v} t(v, Y) > 0 \quad (1.3.18)$$

Se, al contrario, la risposta del sistema sismogenetico in esame in termini dell'attrito è contraria al cambiamento di  $v$ , cioè se risulta

$$\frac{\partial}{\partial v} t(v, Y) < 0 \quad (1.3.19)$$

allora lo scorrimento è *instabile*.

Si parla di *stato stazionario* quando si verifica la condizione seguente:

$$\frac{d}{dt} Y = 0 \quad (1.3.20)$$

cioè quando la variabile di stato —  $F$  per Dieterich e  $q$  per Ruina — non è soggetta ad evoluzione temporale. In questa situazione l' attrito assume un valore stazionario,  $t^{ss}$ , il quale risulta:

$$t^{ss^{(Do)}}(v) = \frac{t_* + B \ln\left(\frac{v_*}{v} + 1\right)}{1 + \frac{A}{t_*} \ln\left(\frac{v_*}{v} + 1\right)} \quad (1.3.21)$$

nel caso della legge di Dieterich originaria (1.3.15a),

$$t^{ss^{(Dr)}}(v) = t_* + (B - A) \ln\left(\frac{v_*}{v} + 1\right) \quad (1.3.22)$$

per la Dieterich ridotta (1.3.16a) ed infine

$$t^{ss^{(R)}}(v) = t_* + (B - A) \ln\left(\frac{v_*}{v}\right) \quad (1.3.23)$$

nel caso di Ruina (1.3.17a). A tali risultati si perviene dopo semplici passaggi algebrici sostituendo nelle equazioni generali ( non stazionarie ) il valore stazionario della variabile di stato, che risulta:

$$F^{ss} = \frac{L}{v} \quad (1.3.24)$$

nei primi due casi e

$$q^{ss} = -B \ln\left(\frac{v}{v_*}\right) \quad (1.3.25)$$

nell' ultimo.

### 1.3.6. I due campi di velocità: velocity weakening e velocity strengthening

Nel caso particolare di stato stazionario, esaminato nel precedente paragrafo e definito analiticamente dall' equazione (1.3.20), le condizioni di stabilità (1.3.18) e di instabilità (1.3.19) sono rimpiazzate rispettivamente dalle disequazioni

$$\frac{d}{dv} t^{ss} > 0 \quad (1.3.26)$$

e

$$\frac{d}{dv} t^{ss} < 0 \quad (1.3.27)$$

ove la derivata parziale è sostituita da quella totale, essendo infatti  $t^{ss}$  indipendente dalla variabile di stato ( cfr. equazioni (1.3.21), (1.3.22) e (1.3.23) ).

Esplicitando tali derivate si hanno:

$$\frac{d}{dv} t^{ss^{(D_0)}} = - (B - A) \frac{1}{(v+1) \left[ 1 + \frac{A}{t_*} \ln \left( \frac{v_*}{v+1} \right) \right]^2}$$

nel caso di Dieterich,

$$\frac{d}{dv} t^{ss^{(Dr)}} = - (B - A) \frac{v_*}{v(v_* + v)}$$

per la Dieterich ridotta ed infine

$$\frac{d}{dv} t^{ss^{(R)}} = - (B - A) \frac{1}{v}$$

nel modello di Ruina. Come si vede, tutte le espressioni precedenti dipendono



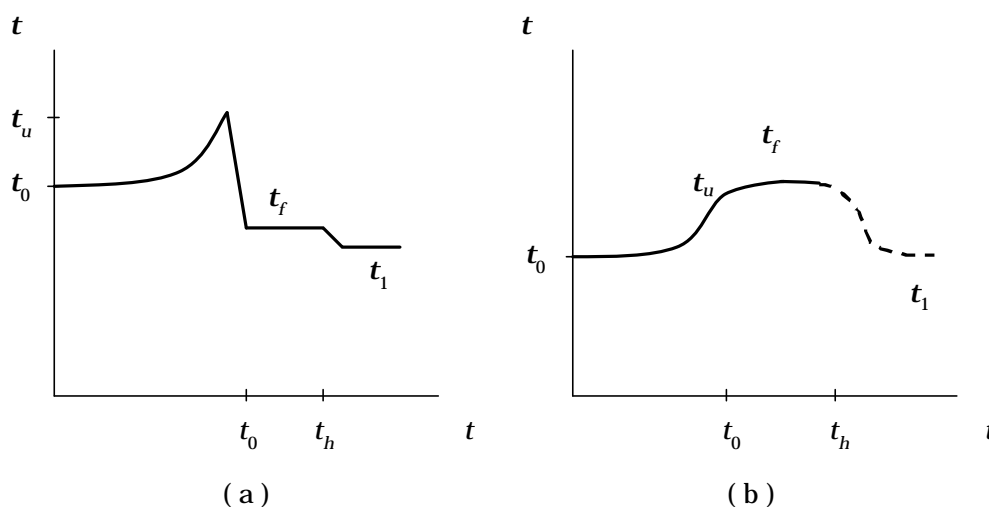
dal segno della quantità  $( B - A )$  che pertanto condiziona la stabilità del moto.

In letteratura sono stati definiti due campi di velocità: il primo, il *velocity weakening*, è associato ad un' instabilità ed è contraddistinto da  $( B - A ) > 0$ ; il secondo, detto *velocity strengthening*, corrisponde invece ad uno scorrimento stabile ed è caratterizzato dalla condizione  $( B - A ) < 0$ . Nel primo caso la superficie di scorrimento, ovvero la superficie di faglia, risulta potenzialmente sismica, cioè sotto opportune condizioni di carico è possibile che si manifesti un rilascio di sforzo in modo sismico ( istantaneo ) di parte dell' energia accumulata; nel secondo caso, invece, lo scorrimento avviene in maniera asismica ( § 1.1 ), cioè l' energia è liberata con una velocità prossima a quella di accumulo.

Nell' ambito di questi due regimi di velocità, Boatwright & Cocco ( 1996 ) hanno proposto, in un modello ad un solo grado di libertà ( spring slider model ), la distinzione di quattro tipi di comportamenti: *strong seismic* (  $B - A \gg 0$  ), in cui si hanno notevoli cadute di sforzo ed ampi scorrimenti sismici; *weak seismic* (  $B - A \approx 0$  ), nelle quali il rilascio di sforzo e gli intervalli di ricorrenza dell' instabilità sono inferiori a quelli che caratterizzano le faglie strong; *viscous* (  $B - A \ll 0$  ) e *compliant* (  $B - A \approx 0$  ) in cui lo scorrimento è stabile, ma nell' ultimo caso può accelerare verso l' instabilità in presenza di sollecitazioni ( dinamiche ) improvvise dello sforzo di carico. Tale modello, denominato *coupled asperity* in quanto tiene conto della definizione di asperità ( § 1.2.4 ) data da Kamamori ( 1981 ) e del loro accoppiamento con le aree che le circondano, consente di interpretare le eterogeneità della distribuzione di dislocazione osservate durante grandi terremoti in termini delle variazioni laterali dell' attrito sulla faglia.

E' possibile fornire una descrizione dei due regimi di velocità ( *velocity weakening* e *strengthening* ) a partire da un modello dinamico di rottura, invece che basandosi sulle leggi di attrito. In questo modo i due campi di velocità sono caratterizzati da una diversa evoluzione dello sforzo invece che da diversi valori dei parametri  $A$  e  $B$ .

Scholz ( 1990 ) propone un semplice modello di rottura ( fig. 1.8 ): considerato un punto  $P$  della superficie di frattura, identificato dalla coordinata  $x_0$ , si esamina l' andamento dello stress. Quando il fronte di rottura è lontano da  $P$  in  $x_0$  è applicato uno stress iniziale  $t_0$  e lo strength statico è  $t_u$ . Quando la frattura si avvicina a  $P$  in  $x_0$  lo stress aumenta a causa della concentrazione dinamica dello sforzo in prossimità del crack: quando viene raggiunto il valore  $t_u$ , al tempo  $t_0$ , si ha la rottura, ovvero ha inizio lo scorrimento e si manifesta una caduta dinamica di sforzo  $Dt_d \equiv t_0 - t_f$ . ( In questo modello è previsto inoltre che il valore dello sforzo finale, o attrito cinetico,  $t_f$  rimanga costante durante lo scorrimento, ma che dopo il tempo di " cicatrizzazione "  $t_h$  esso scenda ulteriormente ad un valore  $t_1$  ed in tale modo la caduta di sforzo totale  $Dt \equiv t_0 - t_1$  è maggiore di quella dinamica  $Dt_d$  ). Questo comportamento caratterizza il regime di velocity weakening ( fig. 1.8a ).



**Fig. 1.8.** Andamento della stress history in un generico punto  $P$  della faglia, come previsto dal modello dinamico di rottura descritto ( vedi testo ). ( a ) Comportamento velocity weakening: la caduta dinamica di sforzo  $Dt_d$  è positiva; ( b ) Comportamento velocity strengthening:  $Dt_d$  è negativa ( tratta da Scholz, 1990 ).

Se invece ( fig. 1.8b )  $t_f$  risulta maggiore di  $t_0$  la caduta di sforzo  $Dt_d$  diviene negativa: si ha un assorbimento netto di energia. Siamo ora nel caso velocity strengthening: in  $P$  potrà allora esserci uno scorrimento soltanto se nelle zone

della faglia che circondano  $x_0$  si hanno cadute di sforzo positive, come quelle di fig. 1.8a. ( La curva tratteggiata in fig. 1.8b rappresenta il rilassamento postsismico, che porta lo stress al valore finale  $t_1$  ).

### 1.3.7. Le leggi di Cochard & Madariaga

Per simulare l' attrito ad alte velocità di scorrimento Burridge & Knopoff ( 1967 ) utilizzarono una legge, poi ripresa e modificata da Madariaga & Cochard ( 1994 ), nella quale lo sforzo di taglio dipende dalla velocità di scorrimento:

$$t(D\dot{u}) = t_u \frac{v_0}{v_0 + D\dot{u}} \quad (1.3.28)$$

Tale relazione, in cui  $t_u$  è sempre la trazione massima, o attrito statico, e  $v_0$  è una slip velocity di riferimento, non contiene né una variabile di stato, né una lunghezza caratteristica.

Cochard e Madariaga ( 1995 ) hanno infine proposto una seconda legge di attrito di tipo slip and rate dependent:

$$t(Du, Y) = \begin{cases} (t_u - Dt) \left( 1 - \frac{Du}{L} \right), & \text{se } Du \leq d_0 \text{ e } Y \geq Y_1 \\ 0 & \text{, se } Du \geq d_0 \text{ e } Y \geq Y_0 \\ t_{sp} \left( 1 - \frac{Y}{Y_0} \right) & \text{, se } Y \leq Y_0 \text{ e } Y \leq Y_1 \end{cases} \quad (1.3.29a)$$

ove  $L$  è una lunghezza caratteristica e  $Y_1$  è data dalla relazione:

$$Y_1 \equiv Y_0 \frac{Du(t_u - Dt) + d_0(t_{sp} - t_u + Dt)}{d_0 t_{sp}}$$

Nel caso particolare in cui  $t_{sp} = 0$ , (1.3.29a) diviene una legge di tipo

slip – weakening. A (1.3.29a) è associata un' equazione evolutiva per  $Y$  :

$$\frac{d}{dt} Y = - \frac{b}{L_c} (Y - D\dot{u}) \quad (1.3.29b)$$

### 1.3.8. Variazioni dello sforzo normale

Nei precedenti paragrafi è stata fatta l' assunzione che l' attrito  $t$  e la variabile di stato  $Y$  non dipendano dallo sforzo normale alla faglia  $s_n$  ( cfr. (1.3.8) ). Linker & Dieterich ( 1992 ) hanno studiato i cambiamenti di  $t$  causati da variazioni dello sforzo normale oltre che dalla velocità di scorrimento, estendendo in questo modo i precedenti modelli di Dieterich e di Ruina.

La formulazione della nuova legge costitutiva si fonda sulle seguenti ipotesi: (i) per variazioni sufficientemente piccole dello sforzo normale, nello stato stazionario la variabile di stato è indipendente da  $s_n$  e pertanto rimane valida (1.3.24). Ciò implica che anche  $L$  risulti indipendente dallo sforzo normale; (ii) i parametri  $a$  e  $b$  non dipendono da  $s_n$  ( ovvero analogamente  $(d/ds_n)^2 A = (d/ds_n)^2 B = 0$  ovunque nello spazio ); (iii) cambiamenti di  $s_n$  si riflettono sulla variazione della variabile di stato; (iv) tutti gli effetti dovuti ad un cambio di  $s_n$  sono esprimibili dallo stato; (v) un' improvvisa modifica nello sforzo normale porta ad un' istantanea variazione di  $Y$  , che è simmetrica rispetto ad una crescita o ad un calo di  $s_n$  .

Linker & Dieterich definiscono  $Dt$  il cambiamento nell' attrito che si ha durante un processo di scorrimento che risulta da un' improvvisa crescita in  $s_n$  :

$$Dt = b s_n \ln \left( \frac{F}{F^{ss}} \right)$$

ove  $F$  è il valore che la variabile di stato assume immediatamente dopo la crescita di  $s_n$  , ma prima che si abbia lo scorrimento, e  $s_n$  è il valore finale dello

stress normale ( dopo la crescita )<sup>80</sup>. Empiricamente è possibile esprimere  $Dt$  come:

$$Dt = a s_n \ln \left( \frac{s_n}{s_{n_0}} \right)$$

ove  $s_{n_0}$  è lo sforzo normale iniziale ed  $a$  è un fattore di scala, maggiore di  $b$  e da non confondersi con la velocità delle onde P. Per confronto risulta:

$$F = F^{ss} \left( \frac{s_{n_0}}{s_n} \right)^{\frac{a}{b}} \quad (1.3.30)$$

da cui si vede che una crescita dello stress da  $s_{n_0}$  a  $s_n$  produce una diminuzione della variabile di stato da  $F^{ss}$  a  $F$ .

Se infine si estende (1.3.30) postulando che valga anche per una crescita da  $s_n$  in cui lo stato iniziale non sia quello stazionario, si ottiene:

$$F = F_0 \left( \frac{s_{n_0}}{s_n} \right)^{\frac{a}{b}} \quad (1.3.31)$$

Ora  $F = F( t, s_n(t) )$  e pertanto la nuova equazione evolutiva per la variabile di stato risulta:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} F &= \frac{\partial}{\partial t} F + \left( \frac{\partial}{\partial s_n} F \right) \frac{d}{dt} s_n = \\ &= 1 - \frac{vF}{L} - \frac{aF}{b s_n} \dot{s}_n \end{aligned}$$

---

<sup>80</sup> Tale relazione è ottenuta applicando le precedenti ipotesi alla legge di Dieterich in forma ridotta (1.3.16a) trascurando gli 1 negli argomenti dei logaritmi, ovvero considerando che valgano le condizioni:  $F v_* / L \gg 1$  e  $v_* / v \gg 1$ .

Se invece si adotta le legge di Ruina, scritta nella forma

$$t = t_* + b s_n Q + a s_n \ln \left( \frac{v}{v_*} \right) \quad (1.3.32)$$

( ove il secondo addendo a membro destro è  $q$  di (1.3.17a) ), l' equazione corrispondente a (1.3.31) risulta:

$$Q = Q_0 + \frac{a}{b} \ln \left( \frac{s_{n_0}}{s_n} \right) \quad (1.3.33)$$

e pertanto la nuova equazione di evoluzione da associare a (1.3.32) è:

$$\frac{d}{dt} Q = -\frac{v}{L} \left[ Q + \ln \left( \frac{v}{v_*} \right) \right] - \frac{a}{b s_n} \dot{s}_n$$

In definitiva le due estensioni alle equazioni di Dieterich in forma ridotta (1.3.16) ed a quelle di Ruina (1.3.17) sono rispettivamente:

$$\left\{ \begin{array}{l} t = t_* - a s_n \ln \left( \frac{v_*}{v} \right) + b s_n \ln \left( \frac{F v_*}{L} \right) \end{array} \right. \quad (1.3.34a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} F = 1 - \frac{vF}{L} - \frac{a}{b s_n} F_0 \left( \frac{s_{n_0}}{s_n} \right)^{\frac{a}{b}} \dot{s}_n \end{array} \right. \quad (1.3.34b)$$

e

$$\left\{ \begin{array}{l} t = t_* + b s_n Q + a s_n \ln \left( \frac{v}{v_*} \right) \end{array} \right. \quad (1.3.35a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} Q = -\frac{v}{L} \left[ Q + \ln \left( \frac{v}{v_*} \right) \right] - \frac{a}{b s_n} \dot{s}_n \end{array} \right. \quad (1.3.35b)$$

ove, in entrambi i casi,  $a$  è adimensionale.