

---

## **2. Simulazioni numeriche di fratture 2 - D**

### **2.1. Osservazioni preliminari**

Negli ultimi 30 anni sono stati compiuti rilevanti progressi nello studio e nella comprensione dei processi di frattura intesi come causa di un terremoto. Tali risultati sono stati raggiunti mediante una modellazione degli eventi sismici come fratture di taglio, utilizzando metodi dinamici. Il principale obiettivo è quello di venire a conoscenza delle possibili velocità di rottura osservabili durante la fratturazione che determina un sisma, nonché dell'evoluzione temporale dello scorrimento e della sua distribuzione spaziale sulla superficie di faglia.

Nel 1960 sono stati risolti semplici problemi dinamici trattati in maniera totalmente analitica modellando i terremoti come fratture di taglio 2 - D e 3 - D self - simili ( ovvero con dipendenza funzionale da combinazioni delle variabili indipendenti tali da ottenere i valori delle soluzioni per tempi più

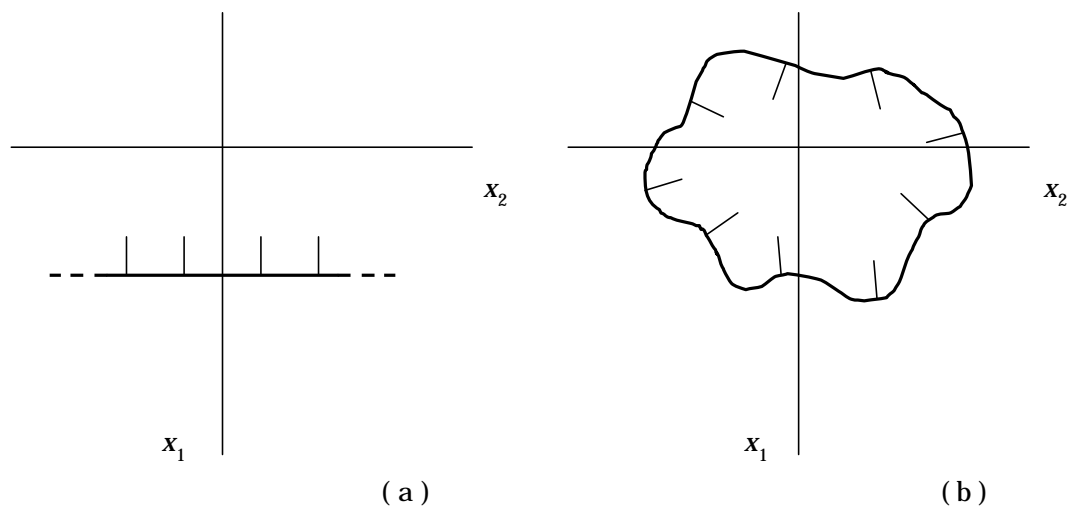
grandi, o più piccoli, semplicemente tramite un cambiamento di scala ) propagantisi con velocità nota. Questo tipo di approccio nella descrizione del fenomeno è definito *problema non spontaneo*. In seguito è stato considerato il *problema spontaneo* nel quale si adotta un criterio per stabilire se e quando la frattura possiede energia sufficiente per dislocare ( criteri di frattura ). In un certo senso la legge dello slip – weakening esposta nel paragrafo 1.2.3 può essere vista anche come un criterio di frattura.

Esistono in letteratura numerose soluzioni analitiche al problema dinamico per fratture piane in due dimensioni ( Kostrov, 1966; Broberg, 1960; Baker, 1962; Achenbach & Abo – Zena, 1973 ) ed in tre dimensioni ( Kostrov, 1964; Burridge & Willis, 1969; Willis, 1973; Richards, 1976 ) nell' ipotesi di non spontaneità ( velocità di rottura nota e costante ) e per cracks di taglio di tipo in – plane, o mode II, ed anti – plane, o mode III, semi – infiniti ( Kostrov, 1966; Eshelby, 1969; Slepian, 1976 ).

Queste soluzioni, tuttavia, presentano limiti non trascurabili: le fratture reali sono di dimensioni finite e possono arrestarsi; per questo motivo sono stati proposti algoritmi numerici in grado di risolvere fratture di taglio finite in due dimensioni ( Burridge, 1969 ) ed in tre dimensioni ( Madariaga, 1976; Day, 1979, 1982; Das, 1980, 1981; Virieux & Madariaga, 1982 ).

I metodi numerici possono dividersi in due classi: *metodi alle differenze finite* ( Madariaga, 1976; Virieux & Madariaga, 1982 ) o *agli elementi finiti* ( Das, 1980, 1981 ) da una parte e *metodi di tipo boundary integral* ( Burridge, 1969; Das, 1980, 1981; Burridge & Moon, 1981 ) dall' altra. Metodi appartenenti al primo gruppo sono utilizzabili nei casi in cui la zona di rottura abbia uno spessore arbitrariamente piccolo e trascurabile rispetto alle sue dimensioni laterali, manifestano un' estrema flessibilità e consentono l' introduzione di proprietà inomogenee nel mezzo, nonché lo studio di fratture non planari. Quando invece lo spessore della regione che si frattura è piccolo, ma non più trascurabile, la risposta elastica è ottenuta mediante l' implementazione di procedure numeriche che appartengono al secondo gruppo e che permettono di affrontare in modo più efficiente il problema di fratture piane in un mezzo omogeneo ovunque tranne che sul piano di faglia.

E' stata introdotta in precedenza la distinzione tra situazioni 2 - D e 3 - D per fratture di taglio piane. Le due possibili situazioni sono illustrate in fig. 2.1. Un problema di tipo 2 - D può essere schematizzato come una frattura il cui fronte è piano ( una retta nel piano di faglia  $x_3 = 0$  ): in questo caso le soluzioni — scorrimento e trazione — dipendono da una sola coordinata spaziale,  $x_1$  o  $x_2$ , e dal tempo. Facendo riferimento a fig. 2.1a, è allora lecito considerare il crack tip semplicemente come uno qualsiasi dei suoi punti che si propaga lungo una linea parallela all' asse  $x_1$ .



**Fig. 2.1.** Frattura di taglio piana di tipo 2 - D ( a ) e di tipo 3 - D ( b ). Le linee indicano i fronti di rottura ad un certo istante sul piano  $x_3 = 0$  e le frecce la direzione di propagazione ( istantanea ) del crack.

Un problema di tipo 3 - D, invece, è rappresentato da una frattura il cui fronte è descritto matematicamente da una curva più complessa e questo si riflette nella dipendenza dello slip e della trazione da entrambe le variabili spaziali  $x_1$  e  $x_2$  oltre che dal tempo.

## 2.2. Introduzione della legge costitutiva

In precedenza ( § 1.2.1 ) è stato introdotto il parametro di strength  $S$  definito come il rapporto tra l' aumento di sforzo richiesto per iniziare lo scorrimento (  $t_u - t_0$  ) e la caduta di sforzo (  $t_0 - t_f$  ). Tale relazione " classica " ( Das & Aki, 1977a, 1977b ), tuttavia, presenta il limite fondamentale da un punto di vista fisico di non prevedere un riguadagno dello strength stesso nel tempo, in quanto  $S$  è costante e dipende, al più, dalla posizione.

Da ora in poi verrà attribuita ad  $S$  una connotazione più ampia, introducendo una dipendenza funzionale da più variabili. In generale ( cfr. Das & Kostrov, 1987 ) risulta:

$$S = S( \mathbf{u}, (\partial/\partial t)\mathbf{u}, t(t) )$$

ove, come sempre,  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  rappresenta lo scorrimento sul piano di frattura;  $(\partial/\partial t)\mathbf{u} = (\partial/\partial t) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  la velocità di scorrimento e  $t(t)$  l' attrito.

Nel caso particolare in cui risulti  $S = S(\{ t_i \})$ , con  $t_1 \equiv t_u = m_s(x) s_n(x)$ ,  $t_2 \equiv t_f = m_d(x) s_n(x)$ ,  $t_3 \equiv t_0 = t_0(x)$  ( dove  $m_s$  è il coefficiente di attrito statico,  $m_d$  è il coefficiente di attrito dinamico e  $s_n$  lo sforzo normale alla superficie di adesione ) si ha la definizione di  $S$  data da Das & Aki ( 1977a, 1977b ). Essa rappresenta un criterio di frattura più che una legge costitutiva, giacchè una volta assegnati  $m_s$ ,  $m_d$  e  $s_n$ , il criterio di Hamano ( § 1.2.1 ) determina in quale punto  $x$  della superficie di frattura può verificarsi una rottura.

Se invece  $S = S(\mathbf{u}, \{ t_i \})$ , si ha la legge costitutiva dello slip - weakening introdotta da Andrews ( 1976a, 1976b, 1985, 1994 ), identificando  $S$  con la funzione  $T$  di (1.2.16):

$$S(u, \{ t_i \}) = \begin{cases} t_u - (t_u - t_f) \frac{u}{d_0} & , u < d_0 \\ t_f & , u \geq d_0 \end{cases}$$

Se ancora  $S = S( (\partial/\partial t)\mathbf{u}, \{ t_i \} )$ , si avrà una legge costitutiva di tipo

velocity – weakening.

Se infine  $S$  viene identificato con  $t$ , cioè se  $S = S(t) = t$ , e  $t = t(\partial/\partial t \mathbf{u}, \mathbf{Y})$  si avrà una legge costitutiva di tipo rate and state dependent friction (Dieterich originaria (1.3.15a), Dieterich ridotta (1.3.16a), Ruina (1.3.17a)); se  $t = t(\partial/\partial t \mathbf{u})$ , come in (1.3.28), avremo una rate dependent friction law, mentre se  $t = t(\mathbf{u}, \mathbf{Y})$ , come in (1.3.29a), si ha una slip and state dependent friction law.

Ad eccezione del primo caso in  $S$  compare, in maniera implicita, la dipendenza dal tempo, essendo infatti  $\mathbf{u}$ ,  $(\partial/\partial t)\mathbf{u}$  e  $\mathbf{Y}$  esplicitamente dipendenti da  $t$ .

L' esigenza di introdurre tali leggi costitutive — legge di Dieterich o di Ruina da un lato o criterio dello slip – weakening dall' altro — per risolvere il problema dinamico ( equazione fondamentale dell' elastodinamica (1.2.7) ovvero equazione (1.2.13) ) scaturisce da considerazioni fisiche ed analitiche.

Per quanto concerne il primo aspetto si prenda in esame l' equazione di bilanciamento energetico per una frattura ( Scholz, 1990 ):

$$U = (-W + U_e) + U_s + U_k + U_f$$

ove  $W$  è il lavoro compiuto dalle forze esterne,  $U_e$  l' energia di deformazione,  $U_s$  l' energia di superficie coinvolta durante il processo di creazione della frattura,  $U_k$  l' energia cinetica ed  $U_f$  il lavoro compiuto contro l' attrito. ( Si noti che è stata trascurata l' energia gravitazionale ). Nel caso dinamico la condizione di equilibrio è data dalla derivata temporale del bilanciamento energetico:

$$0 = \dot{U} = (-\dot{W} + \dot{U}_e) + \dot{U}_s + \dot{U}_k + \dot{U}_f \quad (2.2.1)$$

nella quale le quantità citate sono espresse dalle relazioni:

$$\dot{W} = \int_{S_0} \mathbf{s}_{ij} \dot{u}_i n_j dS \quad (2.2.2a)$$

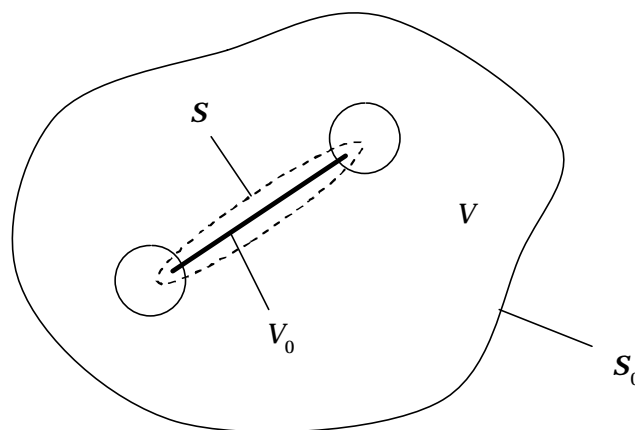
$$\dot{U}_e = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{V-V_0} \mathbf{s}_{ij} e_{ij} dV \quad (2.2.2b)$$

$$\dot{U}_s = \frac{\partial}{\partial t} \int_{S_0} 2g dS \quad (2.2.2c)$$

$$\dot{U}_k = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_V \mathbf{r} \dot{u}_i \dot{u}_i dV \quad (2.2.2d)$$

$$\dot{U}_f = \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{s}_{ij} u_i n_j dS \quad (2.2.2e)$$

ed i domini di integrazione sono riportati in fig. 2.2.



**Fig. 2.2.** Domini di integrazione nel bilanciamento energetico rappresentati in una sezione trasversale del mezzo considerato. La superficie  $S_0$  è un toro che circonda il fronte di rottura ( il segmento marcato ), mentre  $S$  è una superficie che contiene totalmente il crack tip ( tratta da Scholz, 1990 ).

<sup>50</sup>  $e_{ij}$  è il tensore deformazione ( o di Almansi ) definito, in approssimazione di linearità, come:  
 $e_{ij} = 1/2 ( u_{i,j} + u_{j,i} )$ .

Se si procede nell' ambito della teoria della meccanica della frattura lineare elastica, in cui il crack non possiede forze di coesione, il termine (2.2.2e), legato all' attrito, svanisce e soltanto in questo caso risulta possibile valutare l' energia di superficie sul fronte di rottura (2.2.2c) e pertanto risolvere (2.2.1).

Nel caso in cui l' attrito sia presente è impossibile valutare (2.2.2e) poiché  $s_{ij}$  ed  $u_i$  sono incogniti e da questo segue la non solubilità di (2.2.1). Pertanto in modelli dinamici di shear – cracks è necessario utilizzare leggi costitutive le quali non sono legate a bilancio energetico.

L' approccio seguito da Ida ( 1972 ) e da Andrews ( 1976a, 1976b, 1985, 1994 ) nell' introduzione della forza di coesione e del criterio dello slip – weakening è di tipo analitico, in quanto nasce dalla necessità di rimuovere le singolarità nelle componenti del tensore degli sforzi sul fronte di rottura di un crack in un mezzo elastico; quello seguito da Dieterich ( 1978, 1979a, 1979b, 1981 ) e Ruina ( 1980, 1983 ) è invece di tipo fisico, come visto in precedenza, ed ha inoltre il vantaggio di introdurre il fenomeno di riguadagno dello sforzo.

### **2.3. Soluzione del problema dinamico con slip - weakening**

Consideriamo la situazione illustrata al paragrafo 1.2.2: la faglia è nel piano  $x_3 = 0$  ed è immersa in un mezzo elastico omogeneo, isotropo ed infinito, a riposo ( equilibrio statico ) per tempi precedenti all' istante  $t = 0$ . Da (1.2.13), con opportuna ridefinizione degli indici, considerando che la perturbazione alla trazione è esprimibile come  $T_j^P = s_{jk}^P n_k$  ( con  $\mathbf{n}$  intendendo, come di consueto, il versore normale alla superficie di faglia ) e che siamo sul piano  $x_3 = 0$ , risulta:

$$u_i(x_1, x_2, t) = \int dt \int G_{ij}(x_1 - x_1, x_2 - x_2, t - t) T_j^P(x_1, x_2, t) dx_1 dx_2 \quad (2.3.1)$$

ove  $G_{ij}$ , come già osservato ( § 1.2.2 ), è la soluzione al problema di Lamb, riportato in Appendice A.

Per risolvere (2.3.1) nelle incognite  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $T_1^P$  e  $T_2^P$  viene seguito il metodo

di tipo *boundary integral* descritto da Andrews & Das ( 1984 ) e da Andrews ( 1985 ). Per semplicità ci si pone nell' ipotesi di avere fratture in *in - plane*, ovvero fratture per cui il vettore spostamento è perpendicolare al fronte di rottura, che viene assunto propagarsi in direzione  $x_1$ . Tale ipotesi equivale a considerare che il vettore di sforzo totale  $\mathbf{T}$  abbia solo una componente diversa da zero. Se, invece, fosse  $\mathbf{T} = ( T_1, T_2 )$  si avrebbero fratture di tipo *mixed - mode*, per le quali il vettore di slip e la perturbazione alla trazione avrebbero, in generale, entrambe le componenti ( *in - plane* ed *anti - plane* ) diverse da zero. Questo problema è stato affrontato da Andrews & Das ( 1984 ) e ripreso da Andrews ( 1993, 1994 ). Poiché tuttavia le componenti 1 e 2 sono disaccoppiate ( ciò non sarà vero, in generale, per cracks 3 - D ) non è eccessivamente restrittivo trattare solamente il caso *in - plane*.

Essendo, come già osservato ( § 2.1 ), le incognite indipendenti da una delle due variabili spaziali — nel caso in esame da  $x_2$  — è utile introdurre il tensore funzione di Green due - dimensionale

$$g_{ij}(x_1, t) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} G_{ij}(x_1, x_2, t) dx_2 \quad (2.3.2)$$

non dipendente da  $x_2$  per definizione, i cui elementi non diagonali sono nulli. In questo modo è possibile riscrivere (2.3.1) come:

$$u_1(x_1, t) = \iint g_{11}(x_1 - x_1, t - t) T_1^P(x_1, t) dx_1 dt \quad (2.3.3)$$

essendo la componente 2 nulla per ipotesi. Per semplicità di notazione nel seguito verranno omessi gli indici 1. E' possibile inoltre esprimere  $g$  come ( Das & Aki, 1977a ):

$$g(x, t) = - \frac{2 v_P}{p m |x|} f(p) \quad (2.3.4)$$

ove  $v_P$  è la velocità delle onde P,  $m$  è la seconda costante di Lamé ed  $f(p)$  è una funzione adimensionale la quale dipende dalla variabile  $p \equiv v_P t / x$ .

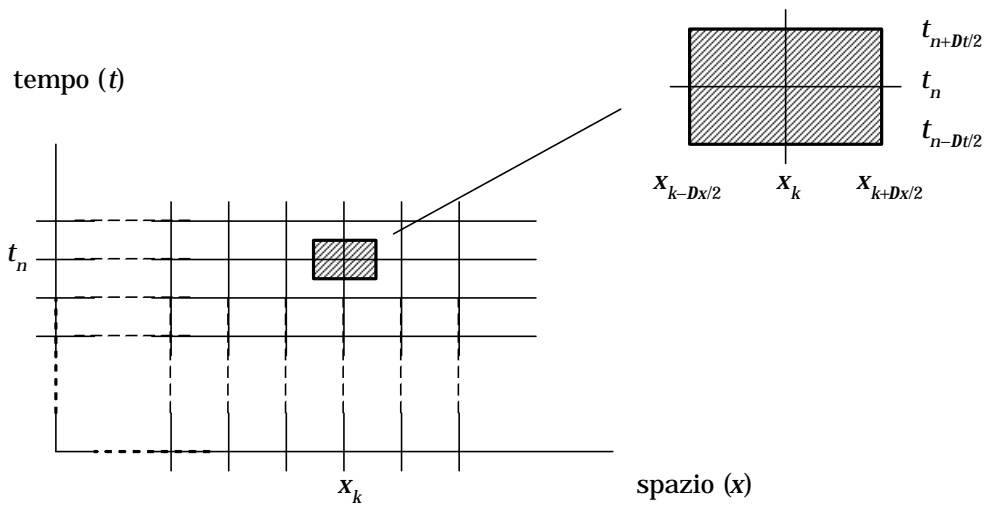


L'assunzione che è alla base del metodo del boundary integral è la discretizzazione delle variabili  $u$  e  $T^P$ : viene introdotta una griglia di punti distanziati della quantità  $Dx$  nello spazio ( in  $x_1$  ) e di  $Dt$  nel tempo. Si impone che la perturbazione della trazione continua  $T^P(x,t)$  sia legata a quella discretizzata  $T^P(k,n)$  mediante la relazione:

$$T^P(x,t) = T^P(k,n) \quad \text{per } x \in \left] x_k - \frac{Dx}{2}, x_k + \frac{Dx}{2} \right[ \quad (2.3.5)$$

$$\text{e per } t \in \left] t_n - \frac{Dt}{2}, t_n + \frac{Dt}{2} \right[$$

ed imponendo la continuità sui bordi dei rettangoli. La situazione è illustrata in fig. 2.3.



**Fig. 2.3.** Discretizzazione del problema. La retta spaziale e quella temporale sono suddivise in elementi  $Dx$  e  $Dt$ . L'assunzione principale è l'uguaglianza delle trazioni continue  $T^P(x,t)$  e di quelle discretizzate  $T^P(k,n)$  all'interno di rettangoli, dei quali uno qualsiasi è evidenziato.

Sotto queste ipotesi l'integrale (2.3.3) diviene:

$$u(j,m) = \sum_k \sum_n F(k,n) T^P(j-k,m-n) \quad (2.3.6)$$

in cui  $j$  rappresenta lo spazio,  $m$  il tempo e si è posto:

$$F(k,n) \equiv \int_{t_n - \frac{Dt}{2}}^{t_n + \frac{Dt}{2}} \int_{x_k - \frac{Dx}{2}}^{x_k + \frac{Dx}{2}} g(x,t) dx dt \quad (2.3.7)$$

In virtù di alcune proprietà di  $F$ , per le quali si rimanda, ad esempio, al lavoro di Andrews ( 1985 ), si ha che sotto la condizione in cui risulti  $Dx \geq v_p Dt$  solo l'elemento  $k = 0$  è non nullo per  $n = 0$ , ovvero:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} F(k,0) = F(0,0)$$

E' allora possibile riscrivere  $u$  di (2.3.6) come somma di due contributi separati: il primo rappresenta fisicamente la risposta del mezzo al carico dinamico istantaneo ed il secondo la risposta al carico dinamico dei punti precedenti:

$$u(j,m) = F(0,0) T^p(j,m) + L(j,m)$$

ovvero analogamente

$$u(j,m) + C T^p(j,m) = L(j,m) \quad (2.3.8)$$

ove  $C$  è la *local compliance*, o impedenza, su cui è mediata la trazione attuale  $T^p(j,m)$

$$C \equiv - F(0,0)$$

ed  $L$  è il *carico dinamico* che è dato dalla convoluzione della funzione di Green discretizzata  $F(k,n)$  con tutti i valori assunti da  $T^p$  nel passato, e dunque noti:

$$L(j,m) \equiv \sum_k \sum_{n>0} F(k,n) T^p(j-k,m-n)$$

In (2.3.8)  $u$  rappresenta la dislocazione,  $T^P$  la trazione dinamica istantanea ed  $L$  il carico dinamico dovuto a tutti i punti che hanno già subito la dislocazione, cioè sono interni al crack – tip.

A questo punto viene introdotto il criterio di frattura: se il valore assoluto della trazione totale  $T = t_0 + T^P$  è inferiore allo strength  $S$  la variazione dello slip nel tempo è nulla:

$$\left| t_0 + T^P \right| < S \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t} u = 0; \quad (2.3.9)$$

se al contrario  $T$  è uguale ad  $S$  allora lo slip varia nel tempo:

$$\left| t_0 + T^P \right| = S \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t} u \neq 0; \quad (2.3.10)$$

Nelle due precedenti relazioni la definizione di  $S$ , come discusso nel paragrafo precedente, specifica la legge costitutiva utilizzata, che nel caso in esame è quella dello slip – weakening:  $S$  è infatti definito come la trazione massima assegnata in ciascun punto della faglia:

$$S(u) = \begin{cases} t_u - (t_u - t_f) \frac{u}{d_0} & , u < d_0 \\ t_f & , u \geq d_0 \end{cases}$$

L' implementazione numerica del metodo proposto avviene tramite l' introduzione di una perturbazione alla trazione di prova:

$$T^t(j,m) = \frac{1}{C} [ L(j,m) - u(j,m-1) ]$$

Se risulta  $| t_0 + T^t | < S$  allora la soluzione per la trazione è proprio  $T^P = T^t$ , in quanto non vi è rilascio dinamico di sforzo e lo slip  $u$  ha il valore che possedeva all' istante di tempo precedente, proprio perché, in accordo con (2.3.10), non si ha variazione dello scorrimento nel tempo:  $u(j,m) = u(j,m-1)$ .

Se invece risulta  $|t_0 + T^t| > S$  è necessario risolvere il sistema di due equazioni

$$\begin{cases} t_0 + T^p(j, m) = S(u(j, m)) \\ u(j, m) + C T^p(j, m) = L(j, m) \end{cases} \quad (2.3.11)$$

il quale viene affrontato iterativamente mediante linearizzazioni successive: siano  $k$  l'ordine di iterazione,  $DT^p \equiv T^{p[k+1]} - T^{p[k]}$  e  $Du \equiv u^{[k+1]} - u^{[k]}$ . In questo modo all' iterazione  $k + 1$  si avranno:

$$\begin{cases} t_0 + T^{p[k+1]} = S(u^{[k+1]}) \\ u^{[k+1]} + C T^{p[k+1]} = L \end{cases}$$

ovvero, sviluppando in serie di Taylor al primo ordine:

$$\begin{cases} t_0 + T^{p[k]} + DT^p = S(u^{[k]}) + S'(u^{[k]}) Du \\ u^{[k]} + Du + C (T^{p[k]} + DT^p) = L \end{cases} \quad (2.3.12)$$

con  $DT^p$  e  $Du$  incognite,  $T^{p[k]}$  ed  $u^{[k]}$  note dall' iterazione precedente e  $S' = (d/du)S$ . Risolvendo (2.3.12) in  $DT^p$  e  $Du$  si ottengono  $T^{p[k+1]}$  ed  $u^{[k+1]}$ .

Quando  $t_0 + T^{p[k+1]} - S$  diviene sufficientemente piccolo ( inferiore ad una certa tolleranza fissata  $e = (t_u - t_f) / 1000$  ) la procedura termina con i valori per  $T^p$  ed  $u$  assunti nell' ultima iterazione.

Parametri in ingresso del codice di calcolo. Il programma proposto originariamente da Andrews e sviluppato in questa tesi mediante le implementazioni descritte in dettaglio nel capitolo quarto richiede i seguenti parametri in ingresso:

PARAMETRI CINEMATICI DEL MEZZO IN CUI SI PROPAGA LA FRATTURA:

-  $a \equiv (v_p/v_S)^2$ , rapporto adimensionale elevato al quadrato delle velocità di

un' onda di compressione P e di una di taglio S. Nel codice numerico verrà posto  $v_S = 1$  e verrà ridefinita  $v_P$  come  $v_P' \equiv a^{1/2} \equiv v_P / v_S$ . Deve risultare  $a > 4/3$ ;

DISCRETIZZAZIONE DELLO SPAZIO E DEL TEMPO:

- $dx$ , distanza percorsa da un' onda P in uno step temporale.  $dx$  e  $dt$  sono pertanto legati dalla relazione  $dx = v_P dt$ . Questo infatti è il minimo valore di  $dx$  per cui risulta soddisfatta la condizione  $Dx \geq v_P Dt$ , per la quale è possibile esprimere lo scorrimento come in (2.3.8);

PARAMETRI DEL MODELLO SLIP – WEAKENING:

- $t_0$ , valore dello sforzo iniziale;
- $t_u$ , sforzo massimo;
- $t_f$ , attrito cinetico oltre la lunghezza caratteristica  $d_0$ .

Nel codice di calcolo utilizzato verrà posto per semplicità  $m = 1$  e pertanto tutti e tre i parametri sono resi adimensionali, infatti essi sono sforzi di taglio ( $s_{31}$  o  $s_{32}$ ) e dalla legge di Hooke per un mezzo elastico, omogeneo ed isotropo — ed è il caso qui trattato — si ha:  $s_{3j} = 2m e_{3j}$ , con  $j = 1, 2$ ;

CARATTERISTICHE DELLA FAGLIA:

- $crtznz$ , numero di elementi in una semi – lunghezza critica. Nel codice di calcolo  $L_c$  è la semi – lunghezza critica e dunque il parametro  $crtznz$  è espresso dalla relazione  $crtznz \cdot dx = L_c$ . Tale parametro è adimensionale, avendo  $dx$ , per definizione, le dimensioni di una lunghezza. Una volta assegnati i tre attriti previsti dal criterio dello slip – weakening e la semilunghezza critica  $L_c$ , da (1.2.17a) e (1.2.18) si ricava il valore di  $d_0$ :

$$d_0 = \frac{p}{2} \frac{v_P}{v_P - 1} \frac{(t_0 - t_f)^2}{t_u - t_f} \frac{L_c}{m} \quad (2.3.13)$$

CONDIZIONI INIZIALI:

- $smear / dx$ , rapporto, adimensionale, tra la lunghezza nella quale avviene

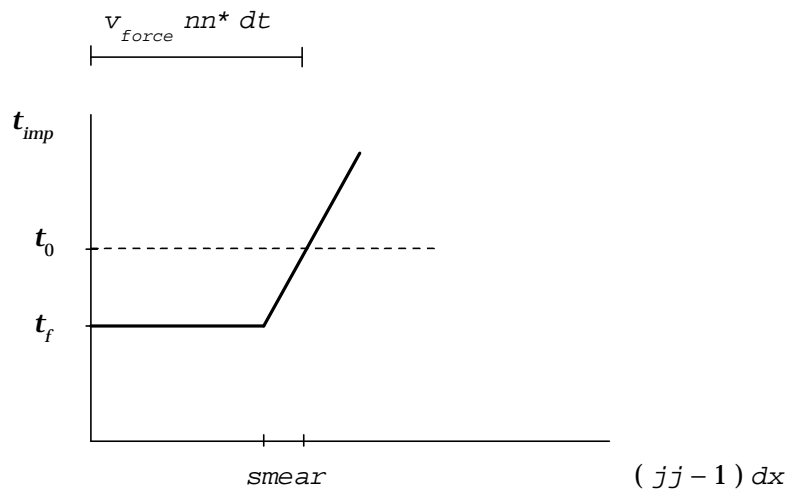
la caduta di sforzo imposta e l' intervallo  $dx$ . Nel codice verrà poi ridefinito  $smear$  come  $smear' \equiv dx (smear / dx)$ ;

- $v_{force} / v_R$ , rapporto adimensionale tra la velocità di propagazione del crack imposta e la velocità di Rayleigh.

Questi valori assegnano le condizioni iniziali del processo dinamico: affinché abbia inizio, la rottura viene forzata a propagarsi ad una velocità costante e fissata,  $v_{force}$ . Ad ogni istante, per ciascuna posizione della linea di propagazione del crack viene calcolato il parametro di strength come il minimo tra quello previsto dalla legge costitutiva dello slip - weakening e quello adottato da Andrews nello studio dei problemi non spontanei, definito come segue:

$$t_{imp} = t_0 + \frac{(t_0 - t_f)}{smear'} \left[ (jj - 1) dx - v_{force} nn^* dt \right]$$

L' andamento di  $t_{imp}$  in un generico istante  $t_{nn^*} \equiv nn^* dt$  è riportato in fig. 2.4.



**Fig. 2.4.** Rappresentazione schematica ad un certo istante del frictional strength nel caso di rottura forzata a velocità costante ( problema non spontaneo ). In questo caso  $S$  non è funzione dello scorrimento, come nello slip - weakening, ma dipende solamente dalla posizione nello spazio e nel tempo. Quando  $(jj - 1) dx = v_{force} nn^* dt$  siamo sul fronte della rottura e  $t_{imp} = t_0$ .

## 2.4. Soluzione del problema dinamico con leggi di attrito

La geometria del problema è equivalente a quella descritta nel precedente paragrafo: la faglia è di taglio, piana e giace in  $x_3 = 0$ . Essa separa due mezzi ( ovvero più semplicemente due parti di uno stesso mezzo ) elastici, omogenei ed isotropi.

Per risolvere il problema dinamico in questo caso Andrews ( 1973 ) ed Andrews & Ben - Zion ( 1997 ) affrontano l' equazione fondamentale dell' elastodinamica (1.2.7) secondo un metodo alle differenze finite. In tale approssimazione le variabili sono definite in punti discreti dello spazio e del tempo. Per questo viene introdotto un grigliato effettuando un ricoprimento del piano  $x_1x_2$  tramite triangoli equilateri ( fig. 2.5 ), il cui utilizzo è preferibile a quello di quadrilateri per ragioni di maggiore efficienza numerica ( Petschek & Hanson, 1968; Trulio, 1964 ).

L' equazione (1.2.7) nel piano  $x_3 = 0$  ed in assenza di forze di volume diviene:

$$\mathbf{r} \frac{\partial}{\partial t} u = \frac{\partial}{\partial x_1} S_{11} + \frac{\partial}{\partial x_2} S_{12} \quad (2.4.1a)$$

$$\mathbf{r} \frac{\partial}{\partial t} v = \frac{\partial}{\partial x_1} S_{12} + \frac{\partial}{\partial x_2} S_{22} \quad (2.4.1b)$$

ove  $u$  e  $v$  sono ora le proiezioni della velocità di scorrimento lungo gli assi  $x_1$  ed  $x_2$  rispettivamente e  $S_{ij}$  le componenti del tensore degli sforzi. Le velocità sono definite nelle coordinate  $x_{1_{i-1}} = (i-1) Dx$ ,  $x_{2_{j-1}} = (j-1) Dx$ , cioè nei vertici del grigliato di fig. 2.5, e  $t_{n-1/2} = (n-1/2) Dt$ , mentre gli sforzi in  $x_{1_{i-1/2}} = (i-1/2) Dx$ ,  $x_{2_{j-1/2}} = (j-1/2) Dx$  e  $t_n = n Dt$ , cioè nel centro dei triangoli equilateri di fig. 2.5. I numeri  $i, j$  ed  $n$  sono interi e limitati. Come nel codice di calcolo esaminato nel paragrafo precedente, anche in questo caso gli intervalli  $Dx$  e  $Dt$  sono costanti.

Per risolvere le (2.4.1) è necessario trovare una relazione che leghi le quantità calcolate ad un certo istante ( discreto ) con il loro valore allo step temporale successivo, infatti, note le velocità di scorrimento, si ricava lo slip dalla semplice relazione:  $U(x_i, t_n) = U(x_i, t_{n-1}) + u(x_i, t_n) Dt$ , nella quale lo spostamento è indicato con  $U$ , per non confonderlo con componente 1 della

velocità di scorrimento  $u$ . A tal fine vengono considerate le quantità

$$f_1 \equiv \frac{1}{S} \left( \oint \mathbf{S}_{11} dx_2 - \oint \mathbf{S}_{12} dx_1 \right)$$

$$f_2 \equiv \frac{1}{S} \left( \oint \mathbf{S}_{12} dx_2 - \oint \mathbf{S}_{22} dx_1 \right)$$

che rappresentano la somma delle forze che agiscono sui lati di un generico esagono regolare i cui vertici coincidono con i centri dei triangoli di fig. 2.5, divise per l' area  $S$  di quest' ultimo (  $S = 1/2 \cdot 3^{1/2} D^2$  ). Assumendo che lo stress sia costante all' interno di ogni triangolo è possibile valutare gli integrali di linea come:

$$f_1 = \frac{1}{2 D^2} ( S_{11_a} - S_{11_c} - S_{11_d} + S_{11_f} ) +$$

$$+ \frac{1}{2 \sqrt{3} D^2} ( S_{12_a} + S_{12_c} - S_{12_d} - S_{12_f} + 2 S_{12_b} - 2 S_{12_e} )$$

$$f_2 = \frac{1}{2 D^2} ( S_{12_a} - S_{12_c} - S_{12_d} + S_{12_f} ) +$$

$$+ \frac{1}{2 \sqrt{3} D^2} ( S_{22_a} + S_{22_c} - S_{22_d} - S_{22_f} + 2 S_{22_b} - 2 S_{22_e} )$$

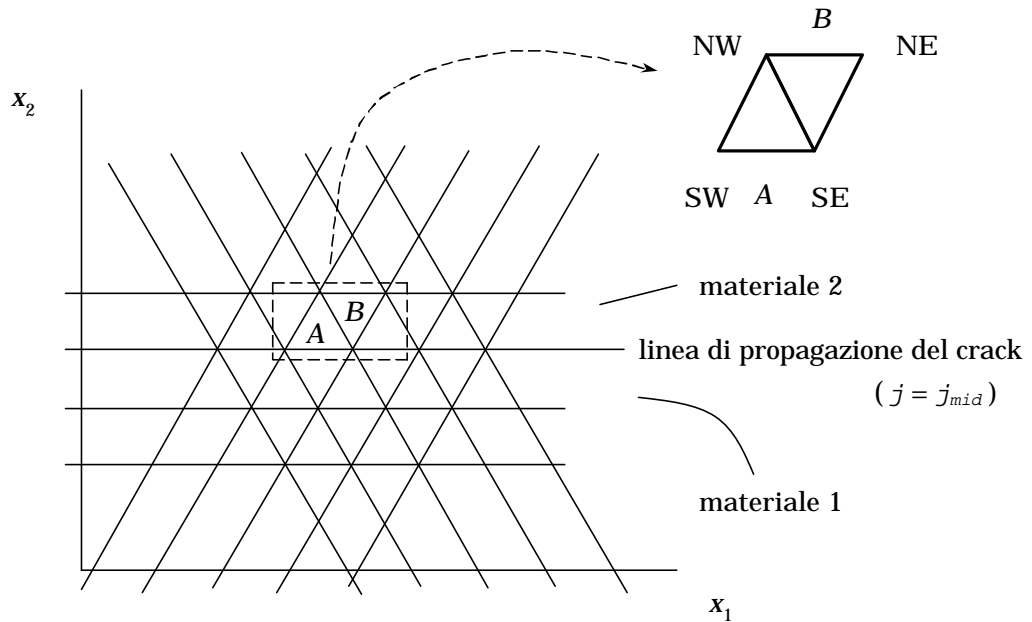
Ogni esagono è costituito da sei triangoli equilateri dei quali tre sono al di sopra delle linee parallele all' asse  $x_1$  e tre sono al di sotto. I punti  $a, b$  e  $c$  denotano i centri dei primi tre triangoli, mentre  $d, e$  ed  $f$  sono riferiti ai triangoli rimanenti.

Come osservato in precedenza, le componenti di  $\mathbf{S}$  sono calcolate in  $t_n$  e conseguentemente anche  $f_1$  ed  $f_2$  sono valutate in  $t_n$ . Da (2.4.1a) e (2.4.1b) è allora possibile ricavare le relazioni cercate per le due componenti della velocità di scorrimento:

$$u^{[n+1/2]} = u^{[n-1/2]} + f_1^{[n]} \frac{Dt}{r}$$

$$v^{[n+1/2]} = v^{[n-1/2]} + f_2^{[n]} \frac{Dt}{r}$$





**Fig. 2.5.** Ricoprimento del piano  $x_1x_2$  con triangoli equilateri: si ottiene in questo modo la griglia di punti utilizzata nell' approssimazione delle differenze finite. Sono inoltre evidenziati i due tipi di triangoli, A e B, presenti nel piano.

Verranno ora ricavate relazioni analoghe per le componenti dello stress. Dalla definizione del tensore delle deformazioni si hanno:

$$\begin{aligned}\dot{\epsilon}_{11}^{[n+1/2]} &= \frac{\partial}{\partial x_1} u^{[n+1/2]} \\ \dot{\epsilon}_{12}^{[n+1/2]} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x_2} u^{[n+1/2]} + \frac{\partial}{\partial x_1} v^{[n+1/2]} \right) \\ \dot{\epsilon}_{22}^{[n+1/2]} &= \frac{\partial}{\partial x_2} v^{[n+1/2]}\end{aligned}$$

Riferendosi al triangolo A di fig. 2.5, è possibile approssimare le tre precedenti espressioni come:

$$\dot{\epsilon}_{11_A} = \frac{1}{Dx} (u_{NE} - u_{NW}) \quad (2.4.2a)$$

$$\dot{\epsilon}_{12_A} = \frac{1}{2 \mathbf{Dx}} (v_{NE} - v_{NW}) + \frac{1}{2\sqrt{3} \mathbf{Dx}} (u_{NE} + u_{NW} - 2 u_{SE}) \quad (2.4.2b)$$

$$\dot{\epsilon}_{22_A} = \frac{1}{\sqrt{3} \mathbf{Dx}} (v_{NE} + v_{NW} - 2 v_{SE}) \quad (2.4.2c)$$

In maniera del tutto analoga si procede per il triangolo B. Si tenga presente che per calcolare la differenza in direzione  $x_2$  delle velocità viene considerato il valore medio di  $u$  ( o di  $v$  ) nel lato orizzontale dei triangoli e che tutte le velocità sono come sempre calcolate nello step temporale  $n + 1/2$ .

Inoltre, dalla derivata rispetto al tempo della legge di Hooke per un mezzo elastico, omogeneo ed isotropo è possibile ottenere tre equazioni che legano le componenti di  $\mathbf{s}$  al time step  $n$  con i valori di  $\mathbf{s}$  all' istante successivo:

$$\mathbf{s}_{11_A}^{[n+1]} = \mathbf{s}_{11_A}^{[n]} + \left[ (I + 2 \mathbf{m}) \dot{\epsilon}_{11_A}^{[n+1/2]} + I \dot{\epsilon}_{22_A}^{[n+1/2]} \right] \mathbf{Dt} \quad (2.4.3a)$$

$$\mathbf{s}_{12_A}^{[n+1]} = \mathbf{s}_{12_A}^{[n]} + 2 \mathbf{m} \dot{\epsilon}_{12_A}^{[n+1/2]} \mathbf{Dt} \quad (2.4.3b)$$

$$\mathbf{s}_{22_A}^{[n+1]} = \mathbf{s}_{22_A}^{[n]} + \left[ I \dot{\epsilon}_{11_A}^{[n+1/2]} + (I + 2 \mathbf{m}) \dot{\epsilon}_{22_A}^{[n+1/2]} \right] \mathbf{Dt} \quad (2.4.3c)$$

Introducendo infine, per via perturbativa, una componente viscosa di tipo Kelvin – Voigt<sup>o</sup> mediante il parametro adimensionale  $C$  si hanno gli sforzi totali ( di natura elastica e viscosa ):

$$\mathbf{S}_{11_A}^{[n+1]} = \mathbf{s}_{11_A}^{[n+1]} + C \left[ (I + 2 \mathbf{m}) \dot{\epsilon}_{11_A}^{[n+1/2]} + I \dot{\epsilon}_{22_A}^{[n+1/2]} \right] \frac{\mathbf{Dx}}{v_P} \quad (2.4.4a)$$

$$\mathbf{S}_{12_A}^{[n+1]} = \mathbf{s}_{12_A}^{[n+1]} + 2 C \mathbf{m} \dot{\epsilon}_{12_A}^{[n+1/2]} \frac{\mathbf{Dx}}{v_P} \quad (2.4.4b)$$

$$\mathbf{S}_{22_A}^{[n+1]} = \mathbf{s}_{22_A}^{[n+1]} + C \left[ I \dot{\epsilon}_{11_A}^{[n+1/2]} + (I + 2 \mathbf{m}) \dot{\epsilon}_{22_A}^{[n+1/2]} \right] \frac{\mathbf{Dx}}{v_P} \quad (2.4.4c)$$

<sup>o</sup> A differenza del modello viscoelastico di Maxwell, il cui analogo meccanico in una dimensione è una molla in serie ad un ammortizzatore, il modello di Kelvin – Voigt ( chiamato

in cui  $(\partial/\partial t) e_{ij}$  sono dati dalle (2.4.2). Le relazioni (2.4.3) e (2.4.4) valgono, con gli opportuni cambiamenti a  $(\partial/\partial t) e_{ij}$ , anche per i triangoli di tipo B.

Ritorniamo ora alle quantità  $f_1$  ed  $f_2$  introdotte in precedenza. In corrispondenza della linea di propagazione della frattura (individuata da  $j = j_{mid}$ ) i centri dei triangoli indicati con  $a$ ,  $b$  e  $c$  sono nel materiale 2, a differenza di quelli indicati con  $d$ ,  $e$  ed  $f$  che sono nel materiale 1. Indicate con  $f_i^{(2)}$  la parte di  $f_i$  che contiene i termini con i pedici  $a$ ,  $b$  e  $c$  e con  $f_i^{(1)}$  quella con i termini  $d$ ,  $e$  ed  $f$ , si definiscono le quantità:

$$T_1 = \frac{\sqrt{3} D x}{2} \frac{r_1 f_1^{(2)} - r_2 f_1^{(1)}}{r_1 + r_2}$$

$$T_2 = \frac{\sqrt{3} D x}{2} \frac{r_1 f_2^{(2)} - r_2 f_2^{(1)}}{r_1 + r_2}$$

Esse hanno le dimensioni di una trazione (avendo  $f_i$  le dimensioni di una forza di volume), dipendono da  $u$  e  $v$  e vengono determinate introducendo il criterio di frattura, il quale esprime la trazione massima che deve essere raggiunta affinché avvenga la rottura. Esso risulta:

$$|T_1| \leq S$$

ove la forma dello strength  $S$  specifica, come discusso nel paragrafo 2.2, quale legge costitutiva si adotta sulla faglia. Come illustrato in seguito si possono avere due casi: se  $di et fr = .TRUE.$  allora  $S$  è espresso come:

$$S = m_D(v, Y) s_n$$

---

anche da alcuni autori semplicemente di Kelvin o di Voigt) prevede che tali elementi siano posti in parallelo. Le corrispondenti relazioni sforzo - deformazione, sempre nel caso 1 - D, sono rispettivamente:  $(\partial/\partial t)e = (\partial/\partial t)s / k + s / h$  e  $s = k e + h (\partial/\partial t)e$ , in cui  $k$  è la costante elastica della molla e  $h$  la viscosità.

In tale relazione  $m_D(v, Y)$  ha la forma della Dieterich ridotta nel codice proposto da Andrews ( ovvero della Dieterich originaria o della legge di Ruina nel caso delle mie implementazioni ) e  $s_n$  è lo sforzo normale effettivo, il quale è dato dalla relazione:

$$s_n = \text{Max}\{ 0, -T_2 - p_{poro} \}$$

ove  $T_2$  è la trazione — positiva nella tensione — normale alla linea di propagazione del crack ( cioè in direzione  $x_1$  ) e  $p_{poro}$  la pressione — positiva nella compressione — esercitata dai fluidi, introdotta come descritto in seguito.

Se invece *dietfr* = .FALSE.  $S$  è dato da due diverse espressioni a seconda che i coefficienti di attrito statico e dinamico siano diversi oppure uguali.

Nel primo caso (  $m_s \neq m_D$  )  $S$  risulta:

$$S = \text{Max}\{ t_3, t^{(s-h)} \}$$

ove:

$$t_3 \equiv \begin{cases} t_0 \equiv 1 \cdot 10^{30} & , \text{ se } T_{width} = 0 \text{ e } d_0 = 0 \\ t_1 \equiv \text{Min}\{ t_0, t^{(t-w)} \} & , \text{ se } T_{width} > 0 \text{ e } d_0 = 0 \\ t_2 \equiv \begin{cases} \text{Min}\{ t_0, t^{(s-w)} \} & , \text{ se } T_{width} = 0 \text{ e } d_0 > 0 \\ \text{Min}\{ t_1, t^{(s-w)} \} & , \text{ se } T_{width} > 0 \text{ e } d_0 > 0 \end{cases} \end{cases}$$

e le quantità  $t^{(s-h)}$ ,  $t^{(t-w)}$  e  $t^{(s-w)}$  rappresentano criteri di slip – hardening, time-weakening e slip – weakening definiti nel modo seguente:

$$t^{(s-h)} \equiv \begin{cases} t_f & , \text{ se } a = 0 \\ t_f + (t_u - t_f) \frac{U(x_i, t_{n-1}) - d_0}{a} & , \text{ se } a \neq 0 \end{cases}$$

$$t^{(t-w)} \equiv t_u - (t_u - t_f) \frac{t - T_{rup}}{T_{width}}$$

$$t^{(s-w)} \equiv t_u - (t_u - t_f) \frac{U(x_i, t_{n-1})}{d_0}$$

in cui  $T_{rup}$  dipende dalle trazioni e dalla variabile di stato e valgono, come sempre:

$$t_u = m_S s_n$$

$$t_f = m_D s_n$$

Nel secondo caso ( $m_S = m_D \equiv m$ )  $S$  è espresso così:

$$S = m s_n$$

Nelle simulazioni effettuate, i risultati delle quali sono presentati e discussi nei capitoli quarto e quinto, si è sempre fatta la scelta: `dietfr = .TRUE..`

Parametri in ingresso del codice di calcolo. Il codice numerico utilizzato richiede in ingresso i seguenti valori:

CARATTERISTICHE FISICHE DEI DUE MEZZI:

- $r_1$ , densità del primo materiale ( in  $Kg / m^3$  );
- $r_2$ , densità del secondo materiale ( in  $Kg / m^3$  );
- $v_{S_1}$ , velocità di un' onda S propagantesi nel primo mezzo;
- $v_{S_2}$ , velocità di un' onda S propagantesi nel secondo mezzo;
- $v_{P_1}$ , velocità di un' onda P propagantesi nel primo mezzo;
- $v_{P_2}$ , velocità di un' onda P propagantesi nel secondo mezzo.

Queste quattro velocità sono espresse tutte in metri al secondo;

- $h_1$ , coefficiente adimensionale che consente di introdurre la perturbazione viscosa al tensore degli sforzi elastici nel primo materiale. Nel codice di calcolo viene posto per semplicità  $h_2 = h_1$ . Questi parametri sono legati alla

costante  $C$  descritta in precedenza tramite le relazioni:

$$C_1 = h_1 \frac{v_{P_1}^2}{3 v_{S_1}^2}, \text{ se } j \neq j_{mid}$$

$$C_2 = h_2 \frac{v_{P_2}^2}{3 v_{S_2}^2}, \text{ se } j = j_{mid}$$

Se, in particolare, risulta  $v_{P_i}^2 / v_{S_i}^2 = 3$ , allora  $C_1 = C_2$ ;

TIME STEP IN CUI VIENE FATTA UN' "ISTANTANEA":

- $ncycop$ , numero intero, al più uguale ad  $n_{max}$ , che identifica un time step in corrispondenza del quale viene fatta un' "istantanea" dei valori assunti dalle incognite, al variare di  $x$  tra 0 ed  $(i_{max} - 1) dx$ . ( Si tenga presente che, in questo caso, vale:  $t_{ncycop} = (ncycop - 1) dt$  );

DISCRETIZZAZIONE DELLE RETTE SPAZIALI E TEMPORALI:

- $dx$ , intervallo ( espresso in  $m$  ) che separa due punti consecutivi del grigliato introdotto nel piano  $x_1 x_2$  ( vedi fig. 2.5 ). Tale quantità è costante in tutto il piano. Come nel codice di calcolo utilizzato per lo studio di fratture 2 - D con il criterio dello slip - weakening, anche in questo caso  $dt$  è fissato una volta specificato  $dx$ : esso è espresso dalla relazione:  $dt = 0.95 \cdot 3^{1/2} dx / 2 \text{Max}\{ v_{P_1}, v_{P_2} \}$ . Nel caso in cui risulti  $v_{P_1} = v_{P_2}$ , poiché il prefattore  $0.95 \cdot 3^{1/2} / 2$  è inferiore all' unità, la risoluzione temporale è ora maggiore di quella che si aveva nel codice per lo slip - weakening ( risulta infatti:  $dt^{(att)} < dt^{(sw)}$  );

SFORZI INIZIALI:

- $t_0$ , sforzo di taglio iniziale nella direzione di propagazione della rottura (  $t_0 = s_{12}$  ), espresso in  $Pa$ , nel caso di attrito costante. Se invece  $m_D$  è dipendente dalla velocità e dallo stato ( vedi seguito ),  $t_0$  viene interpretato come velocità iniziale ( in  $m/s$  ) e permette di ridefinire  $t_0$  come:

$$t_0 = \text{Max}\{ 0, p_0 \} m_D( v_{iniz}, F^{ss} ) \quad (2.4.5)$$

- $p_0$  , valore iniziale ( in Pa ) degli sforzi normali ( di compressione ):  
 $p_0 = -s_{11} = -s_{22}$  ;

COEFFICIENTI DI ATTRITO:

- $m_s$ , coefficiente di attrito statico;
- $m_d$ , coefficiente di attrito dinamico costante nel caso non si utilizzi una legge costitutiva come quelle di Dieterich ( § 1.3.3 ) o di Ruina ( § 1.3.4 );

VALORI PER CALCOLARE LE CONDIZIONI INIZIALI PER LO SLIP ( NEL CASO DI SOLUZIONE STATICA ):

- *stat*, variabile logica che discrimina la soluzione statica ( nel caso sia *stat* = .TRUE. ) da quella dinamica ( *stat* = .FALSE. ).

Solamente nel caso di soluzione statica vengono introdotte le condizioni iniziali per lo slip, in maniera del tutto analoga a quanto compiuto per la variabile di stato ( vedi seguito ), tramite i seguenti valori:

- $sX_{init}$  ;
- $sX_{end}$  ;
- $sX_{taper}$  ;
- $s_{amp}$  ;

CONTROLLO DELLE CONDIZIONI AL CONTORNO:

- *slbndc*, variabile logica il cui valore vero comporta l' introduzione di un impulso di velocità;
- *pfbndc*, variabile logica. Se il suo valore è .TRUE. viene imposta una pressione di fluido, se è .FALSE. allora tale pressione è posta uguale a 0.

Tale pressione di fluido non viene calcolata in maniera dinamica, ma imposta dall' esterno, secondo la relazione:

$$p_{poro}(x_i', t_n') = p_0 \left( \text{Max} \left\{ 0, 1 - E^2 - F^2 \right\} \right)^2$$

ove:

$$E \equiv \frac{x_i' - v_{force} t_n'}{T_{width}}$$

$$F \equiv \frac{x_i' + v_{force} t_n' - \sqrt{x_{end}^2 + T_{width}^2}}{x_{end}}$$

$$x_i' \equiv (i-1) dx - x_{init}$$

$$t_n' \equiv (n-1) dt$$

Come si può vedere  $p_{poro}$  è nulla al di fuori di una regione ellittica del piano  $x't$  descritta dall' equazione:  $1 - E^2 - F^2 = 0$ ;

- $v_{force}$  , velocità ( in  $m / s$  ) utilizzata nella definizione dell' impulso della velocità di scorrimento ( vedi seguito );

VALORI PER CALCOLARE LA CONDIZIONE INIZIALE PER  $F$  E L' EVENTUALE IMPULSO DELLA VELOCITA' DI SCORRIMENTO:

- $T_{width}$  , pulse width che è utilizzato nella definizione dell' eventuale (  $pfbandc = .TRUE.$  ) imposizione dell' impulso della velocità di slip, il cui andamento funzionale è:

$$\dot{u}^{(b.c.)} = v_{amp} \sin^2 \left[ \frac{p}{T_{width}} \left( t - \frac{x - x_{init}}{v_{force}} \right) \right]$$

se  $0 \leq t - (x - x_{init}) / v_{force} \leq 1$  e vale 0 altrimenti;

- $x_{init}$  , punto in cui la funzione  $\ln F$  si discosta dal valore costante  $\ln F^{ss}$ . Si ricorda che  $F^{ss}$  indica il valore stazionario della variabile di stato ( § 1.3.5 ). Nel codice esso è determinato dal rapporto tra la lunghezza caratteristica  $L$  e la velocità di scorrimento iniziale, in accordo con (1.3.24); quando viene utilizzata la legge di Ruina, invece,  $F^{ss} (q^{ss})$  è uguale a  $-b \ln(v/v_*)$ , come in (1.3.25);
- $x_{end}$  , coordinata  $x$  in cui  $\ln F$  ritorna al valore costante  $\ln F^{ss}$ ;
- $x_{taper}$  , distanza che definisce l' intervallo in cui la funzione  $\ln F$  assume il suo valore minimo. Se  $x_{taper}$  è superiore a  $(x_{end} - x_{init}) / 2$  esso viene ridefinito nel codice come tale semidifferenza.

Nei risultati delle simulazioni presentati nei capitoli quarto e quinto verrà compiuta una traslazione tale da porre in  $x = 0$  il centro della zona di



nucleazione, definita da  $x_{init}$  ed  $x_{end}$ . In tal modo le distanze nelle scale delle figure sono legate ad  $i$  mediante la relazione:

$$x_i' = [ i - ( k + 1 ) ] dx$$

in cui  $k$  determina il numero di punti in cui vengono calcolate le soluzioni;

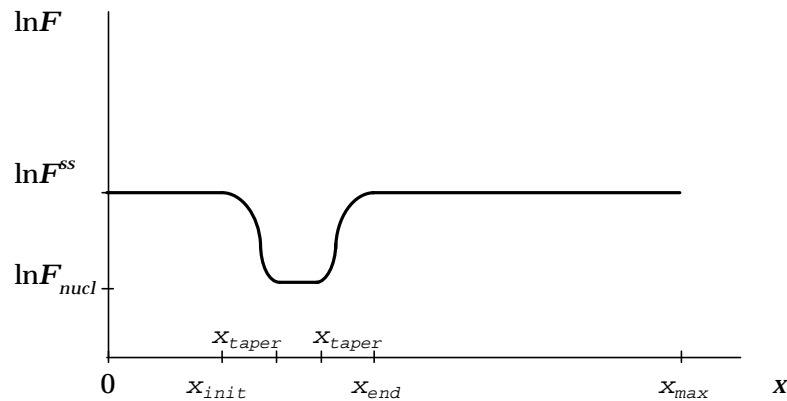
- $v_{amp}$ , valore di  $F$  ( in  $s$  ) corrispondente alla nucleazione (  $v_{amp} = F_{nucl}$  ).  
Esso rappresenta anche il coefficiente dell' impulso della velocità imposta ( nel caso sia  $slbndc = .TRUE.$  ).

Per la variabile di stato  $F$  viene ipotizzato che essa sia ovunque nello stato stazionario ad eccezione della regione di nucleazione. Tale condizione viene descritta mediante la scelta del seguente andamento della funzione  $\ln F$ :

$$\ln F = \begin{cases} \ln F^{ss} & , \text{ se } 0 \leq x \leq x_{init} \\ \ln F^{ss} + \left( \ln F_{nucl} - \ln F^{ss} \right) \sin^2 \left[ \frac{p ( x - x_{init} )}{2 x_{taper}} \right] & , \text{ se } x_{init} < x < x_{init} + x_{taper} \\ \ln F_{nucl} & , \text{ se } x_{init} + x_{taper} \leq x \leq x_{end} - x_{taper} \\ \ln F^{ss} + \left( \ln F_{nucl} - \ln F^{ss} \right) \sin^2 \left[ \frac{p ( x_{end} - x )}{2 x_{taper}} \right] & , \text{ se } x_{end} - x_{taper} < x < x_{end} \\ \ln F^{ss} & , \text{ se } x_{end} \leq x \leq x_{max} \end{cases}$$

la cui rappresentazione è riportata in fig. 2.6.

Tale condizione iniziale viene assunta anche nelle modifiche effettuate al codice di calcolo per renderlo in grado di risolvere il problema dinamico assumendo come governing equation la legge di Ruina e la Dieterich originaria invece della Dieterich ridotta come compiuto dal codice numerico originale di Andrews.



**Fig. 2.6.** Andamento qualitativo della funzione  $\ln F$  al variare di  $x$  tra 0 ed  $x_{max} = (n_{max} - 1) dx$ . La variabile di stato è costante ovunque nello spazio e si trova nello stato stazionario, tranne che nella regione di nucleazione, identificata dalle coordinate  $x_{init}$  ed  $x_{end}$ .

PARAMETRI DELLE LEGGI DI ATTRITO DIPENDENTI DALLA VELOCITA' E DALLO STATO:

- *dietfr*, variabile logica che assegna al coefficiente di attrito un valore costante (*dietfr* = .FALSE. ), ovvero un' espressione variabile nello spazio e nel tempo così come previsto dalle leggi di attrito di Dieterich e Ruina (*dietfr* = .TRUE. );
- *a*, se *dietfr* = .TRUE. è un parametro adimensionale che consente di introdurre gli effetti della variazione al valore dello sforzo normale ( cfr. § 1.3.8 ). Nel caso particolare in cui non si inserisca una pressione di fluido ed i materiali siano identici, lo sforzo normale non cambia nel tempo e conseguentemente la correzione alla variabile di stato scompare. Si tenga presente che nell' equazione evolutiva per *F* e per *q* non compaiono comunque i termini contenenti  $(d/dt) s_n$ , ma vengono mantenute le equazioni " classiche " (1.3.15b), (1.3.16b) e (1.3.17b).

Se l' attrito è costante (*dietfr* = .FALSE. ), nel caso sia non nullo, *a* ( espresso ora in *m* ) introduce una legge di tipo slip – hardening, utilizzata nel criterio di frattura nel caso di attrito statico;

- $f_0$ , rapporto fra la trazione  $t_*$  necessaria per produrre uno scorrimento a velocità  $v_*$  e lo sforzo normale  $s_n$  ( $f_0$  è pertanto adimensionale );
- *a*, primo coefficiente della legge di attrito diviso per  $s_n$ ;

- $b$ , secondo coefficiente della legge di attrito diviso per  $s_n$ ;  
E' già stato osservato ( § 1.3.3 ) che i due parametri  $A$  e  $B$  delle leggi di attrito di Dieterich e di Ruina sono legati a  $s_n$  tramite le due quantità adimensionali  $a$  e  $b$ :  $A = a s_n$ ,  $B = b s_n$ ;
- $L$ , lunghezza caratteristica delle leggi di attrito ( se  $dietfr = .TRUE.$  );  
parametro costitutivo dello slip - weakening utilizzato nel criterio di frattura nel caso di attrito non variabile nel tempo ( se  $dietfr = .FALSE.$  ).