3. Simulazioni numeriche di fratture 3 - D

In questo capitolo viene affrontato il problema della propagazione dinamica di una frattura 3 – D. Questo caso rappresenta una importante implementazione degli studi eseguiti mediante metodi 2 – D presentati nel capitolo precedente, poiché permette di simulare una maggiore varietà di processi fisici e rappresenta una più fedele approssimazione dei processi reali che avvengono durante un terremoto.

3.1. Soluzione del problema dinamico 3 - D

Come accadeva nei problemi 2 – D (§§ 2.3 e 2.4) la faglia è anche in questo caso supposta piana e giace in $x_3 = 0$. Ora, tuttavia, invece di propagarsi lungo una linea, la frattura evolve in maniera più complessa in un piano, in quanto il fronte di rottura è una curva chiusa (cfr. fig. 2.1b) la quale divide il piano x_1x_2 in due parti: una regione rotta $S(t)$ ed una esterna $S^*(t)$ ancora integra. Per questa ragione i modi di propagazione (mode II e mode III) sono accoppiati, cioè si ha un problema di tipo misto, noto come *mixed – mode*.

La strategia numerica adottata nel codice di calcolo è quella di Quin & Das (1989), che verrà di seguito illustrata, la quale è stata implementata da Boatwright et al. (1995) per quanto concerne l' introduzione della legge costitutiva (§ 3.2). Il metodo di Quin & Das è di tipo *boundary integral* ibrido che consente un notevole risparmio di tempo macchina (di circa un fattore 4) rispetto al metodo originale di Das (1980), ma tuttavia non è più veloce rispetto a quello di Das & Kostrov (1987), il quale limita il dominio di convoluzione spaziale alla zona della faglia che ha rotto, che è l' unica in cui lo spostamento è non nullo.

Fino all' istante immediatamente precedente la nucleazione, tutto il piano $x_3 = 0$ è soggetto agli sforzi di taglio $s_{0_{13}}$ e $s_{0_{12}}$ ed allo sforzo normale $s_{0_{33}}$. A $t = 0$ la rottura inizia a propagarsi dall' origine verso l' esterno e, ad un generico istante, indicati con j l' angolo che lo scorrimento forma con l' asse x_1 e con $\{ s_{ij}^{\,p} \}$ le componenti della perturbazione al tensore degli sforzi dovute al processo di scorrimento dinamico, nella parte rotta (S) di $x_3 = 0$ si hanno:

$$
\begin{aligned}
& s_{0_{33}}\, m_D \cos j = s_{0_{13}} - s_{13}^{\,p} \\
& s_{0_{33}}\, m_D \sin j = s_{0_{23}} - s_{23}^{\,p} \\
& s_{33}^{\,p} = 0
\end{aligned}
\qquad (3.1.1a)
$$

ove m_D è, come sempre, il coefficiente di attrito dinamico; nella zona ancora integra (S^*) di $x_3 = 0$ risulta:

$$
\begin{aligned}
& s_{13}^{\,p} ,\ s_{23}^{\,p} \quad \text{ignoti} \\
& s_{33}^{\,p} = 0 \\
& u_1 = u_2 = 0
\end{aligned}
\qquad (3.1.1b)
$$

L' equazione che è necessario risolvere si ottiene da (1.2.13):

$$u_a(x_1,x_2,t)=\int_0^t \mathrm{d}t \int_{S(t)} G_{ab}(x_1-x_1,x_2-x_2,t-t)\, s_{b3}{}^{p}(x_1,x_2,t)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 \;; \qquad a\,,b\,=1,2 \tag{3.1.2}$$

che, come si vede, è analoga a (2.3.1), ma ora viene mantenuto il tensore degli sforzi invece che introdurre la trazione. Il tensore G_{ab} è ancora la soluzione al problema di Lamb, le cui componenti sono calcolate seguendo Richards (1979). Dividendo il dominio di integrazione in due parti, da 0 a t_1 e da t_1 a t, è possibile riscrivere (3.1.2) come:

$$u_a(x_1,x_2,t)=I_0(x_1,x_2,t_1)+I_1(x_1,x_2,t_1,t) \tag{3.1.3}$$

ove:

$$I_0(x_1,x_2,t_1)\equiv\int_0^{t_1}\mathrm{d}t\int_{S(t)} G_{ab}\; s_{b3}{}^{p}\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2$$

$$I_1(x_1,x_2,t,t_1)\equiv\int_{t_1}^{t}\mathrm{d}t\int_{S(t)} G_{ab}\; s_{b3}{}^{p}\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2$$

Introducendo le trasformate di Fourier di G_{ab} e di $s_{b3}{}^{p}$

$$\widehat{G}_{ab}(k_1,k_2,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} G_{ab}(x_1,x_2,t)\,\mathrm{e}^{i(k_1x_1+k_2x_2)}\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2$$

$$\widehat{s}_{b3}{}^{p}(k_1,k_2,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} s_{b3}{}^{p}(x_1,x_2,t)\,\mathrm{e}^{i(k_1x_1+k_2x_2)}\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2$$

si può riscrivere $I_0(\,x_1,x_2,t_1\,)$ come:

$$I_0(x_1,x_2,t_1)=\frac{1}{4p^2}\int_0^{t_1}\mathrm{d}t\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\widehat{G}_{ab}(k_1,k_2,t-t)\,\widehat{s}_{b3}{}^{p}(k_1,k_2,t)\;\mathrm{e}^{i(k_1x_1+k_2x_2)}\,\mathrm{d}k_1\,\mathrm{d}k_2$$

e pertanto (3.1.3) diviene:

$$u_a(x_1,x_2,t)=\frac{1}{4p^2}\int_0^{t_1}\mathrm{d}t\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{G}_{ab}(k_1,k_2,t-t)\,\hat{s}_{b3}{}^{p}(k_1,k_2,t)\,\mathrm{e}^{i(k_1x_1+k_2x_2)}\,\mathrm{d}k_1\,\mathrm{d}k_2\,+$$

$$+\int_{t_1}^{t}\mathrm{d}t\int_{S(t)}G_{ab}(x_1-x_1,x_2-x_2,t-t)\,s_{b3}{}^{p}(x_1,x_2,t)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2$$

Per discretizzare tale espressione Quin & Das (1989) procedono come Das (1980), determinando il valore medio delle componenti del tensore di Green in ogni elemento del volume spazio – tempo. In un arbitrario punto (x_{1_i}, x_{2_j}, t_n) di tale spazio, denotato per semplicità di notazione con (i, j, n), si ha:

$$u_a(i,j,n)=(Dx)^2\,Dt\sum_{l,m,q}G_{ab}(i-l,j-m,n-q)\,s_{b3}{}^{p}(l,m,q)+$$

$$+\sum_{l,m,q}\hat{G}_{ab}(k_{1_l},k_{2_m},t_q)\,\hat{s}_{b3}{}^{p}(k_{1_l},k_{2_m},t_q)\,\mathrm{e}^{-2p\,i\left(\frac{k_{1_l}}{N\,x_{1_i}}+\frac{k_{2_m}}{N\,x_{2_j}}\right)}$$

in cui le trasformate sono ottenute numericamente usando le FFT (Fast Fourier Transform) e l' ampiezza della trasformazione cambia al variare dell' estensione del crack. Si noti infine che la discretizzazione in x_1 ed in x_2 è la stessa.

3.2. Introduzione della legge di Ruina

Come osservato nel paragrafo 2.3, la discretizzazione dell' equazione integrale (3.1.2), sotto l' ipotesi $Dx \geq v_P\,Dt$, permette di scrivere (cfr. (2.3.8)):

$$u=-C\,T^{p}+L$$

Tale relazione, ricavata nel caso di frattura in – plane, vale anche nel caso anti – plane (Andrews & Das, 1984; Andrews, 1994) e conseguentemente si hanno:

$$u_1 = -C_1\ T_1{}^p + L_1 \tag{3.2.1a}$$

$$u_2 = -C_2\ T_2{}^p + L_2 \tag{3.2.1b}$$

ove i pedici 1 e 2 denotano cracks di tipo in – plane ed anti – plane rispettivamente. Nel codice numerico è posto $Dx = 1$ (adimensionale) e $Dt = 1/2$ (anch' esso adimensionale). La scelta di Dx e di Dt assicura che la condizione $Dx \geq v_P\ Dt$ sia soddisfatta e che pertanto i punti vicini vengano isolati e siano quindi valide (3.2.1).
Si vede da (3.1.1a) che la trazione totale $\mathbf{T}$, invece di essere $\mathbf{T} = \mathrm{t}_{\mathbf{0}} + \mathbf{T}^{\mathbf{p}}$ come nel paragrafo 2.3, è ora espressa come:

$$\mathbf{T} = \mathrm{t}_{\mathbf{0}} - \mathbf{T}^{\mathbf{p}} \tag{3.2.2}$$

Conseguentemente, ripetendo le osservazioni compiute nel paragrafo 2.3, si dimostra che (3.2.1) divengono nel nostro caso:

$$u_i = C_i\ T_i{}^p - L_i \tag{3.2.3}$$

in cui le quantità C_i sono ancora

$$C_i \equiv -F_i(0,0)$$

con $F_i(0,0)$ intendendo le funzioni di Green discretizzate per il caso mode II ($i = 1$) e mode III ($i = 2$), calcolate in $x_1 = 0$ (ovvero in $x_2 = 0$) ed in $t = 0$. Calcolando esplicitamente $F_1(0,0)$ ed $F_2(0,0)$, le cui espressioni complete sono riportate nei lavori di Andrews & Das (1984) e di Andrews (1994), si dimostra che $C_1 = C_2 \equiv C$.

Le quantità $\{ L_i \}_{i\,=\,1,\,2}$ sono espresse tramite le relazioni:

$$L_i(j, m_i) \equiv \sum_k \sum_{n>0} F_i(k,n)\, T_i{}^p(j-k, m_i - n)$$

che rappresentano il carico dinamico delle due componenti 1 e 2 dovuto ai punti che sono interni al fronte di rottura. Mentre nel capitolo secondo veniva considerato un problema in cui i due modi (II e III) erano disaccoppiati, nella situazione ora esaminata essi sono accoppiati. In questo caso infatti il carico dinamico è dato dalla norma del vettore (L_1,L_2):

$$L = \sqrt{L_1^{\ 2} + L_2^{\ 2}}$$

Ricavando ora $T_i^{\ p}$ da (3.2.2) e sostituendo in (3.2.3) si ottiene:

$$T = t_0 - \frac{L}{C} - \frac{u}{C}$$

Definendo infine lo stiffness del sistema come[80]

$$k \underset{\text{df}}{=} \frac{1}{C} = \frac{m}{v_S\ Dt} = \frac{v_S\ r}{Dt} \qquad (3.2.4)$$

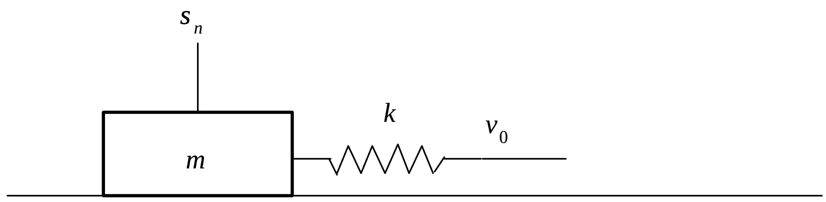
si ha infine:

$$T = t_0 - k\,L - k\,u \qquad (3.2.5)$$

L' equazione (3.2.5) è analoga a quella di uno spring slider in approssimazione quasi – statica (cioè quando $(d/dt)^2\ d\ \cong 0$): $t = s_0 - k\ d$, come descritto in box 3.1. Occorre tuttavia sottolineare che tale analogia è puramente formale, poiché ora l' equivalente del carico s_0 , cioè $t_0 - k\ L$, dipende da tutti i time steps precedenti, in quanto il load L è dato dalla convoluzione delle funzioni di Green discretizzate $F_i(k,n)$ con tutti i valori assunti da $T_i^{\ p}$ nel passato, come detto in precedenza.

[80] Si noti che, dalla definizione, si ottiene che lo stiffness dipende dalla discretizzazione del sistema e poiché Dt dipende linearmente da Dx ($Dx = 2\ Dt$), risulta: $k = k(Dx)$. Questa espressione per k, ottenuta da Andrews (1985), è in accordo con quanto ricavato da Das & Kostrov (1987) sulla base di analisi sulla stabilità della soluzione.

Un sistema meccanico diffusamente utilizzato in letteratura è quello dello spring slider, costituito da una molla e da un blocco di massa m (per unità di area) che è sottoposto ad un carico esterno s_0 e scorre su una superficie con un attrito t, il quale tende a contrastare il moto. Tale sistema elastico ad un solo grado di libertà è così schematizzato:



Rappresentazione schematica di un sistema massa – molla (spring slider) ad un solo grado di libertà. k è la costante elastica della molla e s_n è, come sempre, lo sforzo normale che mantiene il blocco rigido in contatto con la superficie su cui scorre. v_0 è la velocità di carico esterna.

Indicato con d lo scorrimento, l' equazione del moto del sistema massa – molla risulta:

$$m \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} d = s_0 - k d - t$$

Nell' approssimazione quasi – statica (cioè quando $(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)^2\, d \cong 0$) l' equazione dello spring slider diviene:

$$t = s_0 - k\, d$$

che è analoga a (3.2.5).

Box 3.1

Nel caso dello spring slider, invece, s_0 dipende sostanzialmente dalla velocità di carico applicata dall' esterno, ovvero dalla *velocity plate* v_0 :

$$s_0 = s_{0_{iniz}} + k\, v_0\, t$$

ove ora k è lo stiffness dello spring slider, cioè la costante elastica della molla. Proprio per questa ragione (cioè che l' analogia è solamente formale) l' espressione dello stiffness critico ottenuta da Rice & Ruina (1983) per un sistema ad un solo grado di libertà, espressione discussa in seguito, non è applicabile al problema qui studiato.

L' equazione (3.2.5) è accoppiata con la legge costitutiva di Ruina e viene risolta mediante la separazione del dominio delle velocità di scorrimento **v** in due intervalli: $\| \mathbf{v} \| \le v_c$ e $\| \mathbf{v} \| \ge v_c$, dove v_c è una velocità limite, fissata a 0.1 $mm\ /\ s$, che corrisponde al valore oltre il quale l' attrito nello stato stazionario t^{ss} diventa indipendente dalla velocità, come sperimentalmente osservato, ad esempio, da Weeks & Tullis (1985), Okubo & Dieterich (1986), Rice & Tse (1986) e Weeks (1993).
Nel primo caso, $\| \mathbf{v} \| \le v_c$, si risolve il sistema di equazioni nell' approssimazione quasi – statica:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u = v_* \ \mathrm{e}^{F} & (3.2.6a) \\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} q = -\dfrac{v_*}{L}\ \mathrm{e}^{F}\ (q + B\, q\ ) & (3.2.6b) \end{cases}$$

mentre nel secondo, $\| \mathbf{v} \| \ge v_c$, si affronta il problema dinamico:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u = \dfrac{v_*^{\frac{B}{A}}}{v_c^{\frac{B}{A}-1}} \mathrm{e}^{F_d} & (3.2.7a) \\[3ex] \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} q = -\dfrac{v_*^{\frac{B}{A}}}{L\, v_c^{\frac{B}{A}-1}} \mathrm{e}^{F_d}\ (q + A\, F_d\ ) & (3.2.7b) \end{cases}$$

In (3.2.6) e (3.2.7) — risolte numericamente tramite il metodo di Runge – Kutta con il controllo del campionamento temporale (adaptive stepsize control), per il quale si rimanda a Press et al. (1989) ed a Montelli (1995), sua Appendice C — le quantità F e F_d sono parametri che dipendono, oltre che dallo stiffness del sistema (espresso come in (3.2.1)), dallo slip e dai parametri costitutivi della legge di Ruina come nel caso dello spring slider 1 – D, anche dal carico dinamico L. E' importante osservare che nel caso dinamico (cioè quando $\| \mathbf{v} \| \geq v_c$) si assume che la norma della slip velocity sia superiormente limitata (tale limite nel codice di calcolo è $v_m = 10^7 \; v_c$). Questa assunzione discende dalla condizione di collinearità di $\mathbf{v}$ con la trazione totale $\mathbf{T}$, condizione scritta nella forma

$$\frac{v_1}{T_1} = \frac{v_2}{T_2}$$

ovvero più brevemente come:

$$\mathbf{v} = g \; \mathbf{T} \tag{3.2.8}$$

con g ? R. Considerando infatti che risulta:

$$\left| \mathbf{v} \cdot \mathbf{T} \right| \leq \left| v_1 \, T_1 \right| + \left| v_2 \, T_2 \right| = \left| g \right| \, (T_1^{\,2} + T_2^{\,2}) \underset{\mathrm{df}}{=} \left| g \right| \, \| \mathbf{T} \|$$

e che da (3.2.8), per $g \neq 0$, si ottiene

$$\left| \mathbf{v} \cdot \mathbf{T} \right| = \frac{1}{\left| g \right|} \| \mathbf{v} \|^2$$

in conclusione si ha:

$$\| \mathbf{v} \| \leq g^{\,2} \, \| \mathbf{T} \|^2 \tag{3.2.9}$$

Poiché è fisicamente evidente che la trazione totale $\mathbf{T}$ sia finita, risulta che la velocità di scorrimento è superiormente limitata.

3.3. La condizione di Rice sulla minima ampiezza di griglia

Studiando sistemi 2 – D e 3 – D con l' equazione costitutiva di Ruina in approssimazione quasi – statica, Rice (1993) ha mostrato come la risoluzione del grigliato introdotto per discretizzare il problema abbia un effetto importante sui risultati delle simulazioni numeriche. In particolare, egli ha mostrato come una dimensione di griglia h inferiore ad un certo valore critico h^* introduca una complessità artificiale nella soluzione. Questo viene a contraddire l' opinione che tale complessità spazio – temporale fosse una caratteristica generale ed intrinseca della meccanica dei modelli di fagliazione. La quantità h^*, definita da Rice (1993) come *minima dimensione di griglia* (*minima grid size*), è espressa tramite la relazione:

$$h^* = \frac{2\, m\, L}{p\ (\ B - A\ )_{max}} \tag{3.3.1}$$

ove, come di consueto, m è la seconda costante di Lamé, L è la lunghezza caratteristica della legge di Ruina e $(\ B - A\ )_{max}$ è la combinazione dei parametri costitutivi A e B che rende massima la funzione

$$c(B - A) = -v \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v} t^{ss}(v) \tag{3.3.2}$$

sul piano di faglia. In (3.3.2) t^{ss} è il valore dell' attrito nello stato stazionario corrispondente ad una velocità di scorrimento v. Come si può vedere dal paragrafo 1.3.6, la funzione c è monotona crescente rispetto alla variabile $(\ B - A\ )$ sia per la Dieterich originaria, sia per la Dieterich ridotta, che per la legge di Ruina. Dunque il più grande valore di $(\ B - A\ )$ sulla faglia fornisce automaticamente il valore massimo di c .

La condizione di Rice stabilisce che quando è soddisfatta la relazione

$$h \ll h^* \tag{3.3.3}$$

significa che la griglia è sufficientemente “ fine ” affinchè la discretizzazione sia una buona approssimazione delle equazioni continue che vengono risolte numericamente. Il risultato di Rice, il quale considera una faglia di 240 *Km* di lunghezza, con m = 30 *GPa*, $(B - A)_{max} = (b - a)_{max} (s_n - p_{poro}) \cong 0.004 \cdot 100$ *MPa* ed *L* variabile da alcuni millimetri a decine di millimetro, è che quando il rapporto h / h^* è grande rispetto all' unità lo scorrimento che si ottiene dalle varie simulazioni è arricchito da disordine (*complex slip*), mentre una buona scelta, sia per modelli 2 – D che 3 – D, è $h / h^* < 1$. Tale affermazione è stata generalizzata al caso dinamico da Rice & Ben – Zion (1995).

E' possibile dare ad h^* un' interpretazione in termini di grandezze fisiche direttamente legate al processo di frattura.

Per rafforzare l' analogia tra i terremoti e la modellazione della faglia mediante il sistema massa – molla, Dieterich (1978) fornisce un' interpretazione della costante elastica k della molla che costituisce lo spring slider in termini di quantità fisiche legate al processo dinamico di rottura. Egli definisce lo stiffness come il rapporto tra la caduta di sforzo Dt e lo spostamento d :

$$k = \frac{Dt}{d}$$

Tale definizione è fisicamente consistente, in quanto in un sistema massa – molla maggiore è la costante elastica, maggiore è lo sforzo rilasciato durante l' instabilità, mentre, a parità di carico, maggiore è k minore è lo scorrimento del blocco. Dieterich (1992) ha proposto anche la relazione:

$$k = \frac{m\,h}{r} \qquad (3.3.4)$$

ove m è la seconda costante di Lamé, h un fattore che dipende dalla geometria della faglia ed r la semilunghezza (o il raggio) della regione di nucleazione della faglia.

Come verrà meglio illustrato nel successivo capitolo, per uno spring slider ad un solo grado di libertà è possibile definire uno *stiffness critico* K_{cr} espresso come:

$$K_{cr} = \frac{x\, s_n}{L} \qquad (3.3.5)$$

ove x è una costante che dipende dai parametri costitutivi della legge adottata.

Combinando (3.3.4) e (3.3.5) Dieterich (1992) ottiene un' espressione per il raggio critico r_c della regione di nucleazione al di sotto del quale il moto è stabile:

$$r_c = \frac{m\,h\,L}{x\;s_n} \tag{3.3.6}$$

Più esattamente, se il raggio della regione di nucleazione r è minore di $2\,r_c$ allora lo scorrimento è stabile, in quanto risulta $k > K_{cr}$.

Nel caso della legge di Ruina, in approssimazione quasi – statica, dalla definizione di minima lunghezza di griglia (3.3.1) e dall' espressione di r_c (3.3.6) si ha:

$$h^* = \frac{r_c}{h\,p}$$

3.4. Parametri in ingresso del codice di calcolo

A differenza degli altri codici numerici visti nel capitolo secondo, ora le discretizzazioni dello spazio e del tempo sono fissate ($Dx = 1$, $Dt = 1/2$). Oltre ai nomi di alcuni dei files di output il programma richiede in ingresso:

NUMERO DI TIME STEPS:

– numero massimo di istanti di tempo con cui viene discretizzato t;

PUNTI IN CUI AVERE LE USCITE:

– t_1, ..., t_{10} : istanti di tempo nei quali vengono scritti su file i valori della velocità di scorrimento nei vari punti del piano di faglia per visualizzarla in tre dimensioni;
– *iult*, *jvlt*: coordinate nel piano x_1x_2 in cui si vuole conoscere lo

scorrimento, la slip velocity ed il cambiamento nello stress di taglio al variare del tempo;

CONDIZIONI INIZIALI (FISSATE AL PRIMO TIME STEP):

- i_c, j_c : numeri interi che rappresentano le coordinate in $x_3 = 0$ del punto di nucleazione (è predefinito il punto (32,32));
- i_r , j_r : numeri interi i quali definiscono l' estensione in x_1 ed in x_2 dell' asperità (vedi seguito). Sono predefiniti i valori 11, 11;
- valori che definiscono il comportamento nella regione esterna della faglia;
- valori che caratterizzano il comportamento in nove punti del grigliato in x_1x_2 , centrati rispetto al punto di nucleazione (i_c, j_c);
- valori che definiscono il comportamento in una regione intermedia tra i nove punti “ di nucleazione ” e la zona esterna. Questa regione intermedia è definita dalle disequazioni:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{i - i_c}{i_r} \right)^2 + \left(\dfrac{j - j_c}{j_r} \right)^2 \leq 1 \\ (i - i_c)^2 + (j - j_c)^2 > 1 \end{cases}$$

Le tre zone sono schematizzate in fig. 3.1.

Tali valori sono: i tre parametri della legge costitutiva di Ruina A, B (in *bars*) ed L (in mm); lo sforzo di taglio iniziale t_{iniz} (in *bars*); il valore (anch' esso in *bars*) assunto dalla variabile di stato all' istante iniziale; il modulo della velocità iniziale (in mm / s).

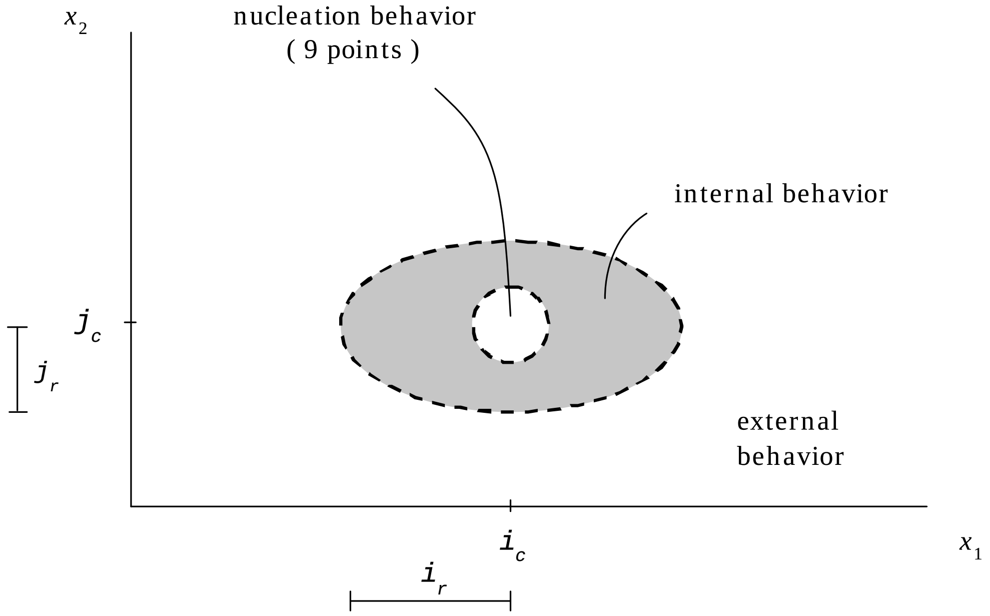


Fig. 3.1. Rappresentazione schematica delle tre regioni nel piano $x_3 = 0$ introdotte nel codice di calcolo. In ciascuna di tali zone i parametri costitutivi della legge di Ruina assumono lo stesso valore e pertanto, con una scelta di questo tipo, il fronte di rottura risulta ellittico, oppure circolare nel caso particolare in cui risulti $i_r = j_r$.